Title: Zur Geschichte der Theorie der Elliptischen Transcendenten
       In den Jahren 1826-29

Author: Leo Koenigsberger

Release Date: September 16, 2009 [EBook #30005]

Language: German

Character set encoding: ISO-8859-1

Produced by Ralf Stephan, Joshua Hutchinson and the Online Distributed Proofreading Team at http://www.pgdp.net (This file was produced from images from the Cornell University Library : Historical Mathematics Monographs collection.)

Anmerkungen zur Transkription

Zitate wurden im schmäleren Block als im Original gesetzt und der nachfolgende Absatz eingezogen, von ganz wenigen Ausnahmen abgesehen.

Mehrere heute nicht mehr übliche französische Pluralformen wurden unverändert übernommen : coefficiens, fondemens, indépendans, intéressans, suivans. Außer wenigen trivialen Druckfehlern wurde einmal »zu« nach »als« verändert :

– …und die Auflösung dieser Gleichung, welche in transcendenter Form **als** Lösungen die φ-Functionen der getheilten Perioden hat, führt Abel vermöge allgemeiner Principien, die er für die Theorie der algebraischen Gleichungen entwickelt hat, auf die Auflösung **einer** Gleichung $2n + 2^{\text{ten}}$ Grades und von $2n + 2$ Gleichungen n^{ten} Grades zurück.

ZUR GESCHICHTE DER THEORIE

DER

ELLIPTISCHEN TRANSCENDENTEN

IN DEN JAHREN 1826–29

VON

LEO KOENIGSBERGER.

»Mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question des nombres vaut autant qu'une question du système du monde.«

(JACOBI à LEGENDRE, Koenigsberg le 2 juillet 1830.)

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1879.

Vorwort.

Veranlasst durch das fünfzigjährige Jubiläum, das in diesem Jahre die »*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*« von JACOBI feiern, deren Erscheinen zusammenfiel mit dem Tode ABEL's, des andern grossen Schöpfers der Theorie der Transcendenten, habe ich in einer kurzen freien Zeit aus früheren Notizen die vorliegende Zusammenstellung gemacht, die vielleicht denen nicht unwillkommen sein wird, welche selbst nicht Zeit und Lust haben, die historische Entwicklung dieser mathematischen Disciplin genauer zu verfolgen.

Dass ich nur die Jahre 1826–29 zugleich mit den dieser Theorie angehörigen Arbeiten von LEGENDRE und GAUSS zum Gegenstande meiner kurzen Darstellung genommen habe, mag dadurch gerechtfertigt erscheinen, dass nicht bloss die Anfänge, sondern ein beträchtlicher Theil der ganzen grossen Theorie der elliptischen Transcendenten, wie wir sie jetzt besitzen, dem Inhalte und der Form nach in jenen Jahren geschaffen wurden.

Reichenau bei Wien, im August 1879.

Leo Koenigsberger.

Die zahlreichen und zum Theil wichtigen Arbeiten von FAGNANO, MACLAURIN, D'ALEMBERT und LANDEN in der Theorie der Integrale algebraischer Irrationalitäten, speciell der Quadratwurzeln aus Polynomen dritten und vierten Grades waren theils auf die Ermittlung geometrischer Beziehungen gerichtet, welche zwischen den Bögen der Ellipse, der Hyperbel und anderer durch einfache algebraische Gleichungen definirter Curven bestehen, theils lieferten sie analytische Relationen zwischen den Gränzen additiv mit einander verbundener Integrale algebraischer Differentiale und Reductionsformeln für solche Integrale auf Integrale von Quadratwurzeln gewisser specieller Polynome dritten oder vierten Grades. In keiner dieser Arbeiten ist jedoch auch nur die Vermuthung zu finden, dass man es hier mit den Anfängen einer grossen, in ihrer Fortbildung die gesammte Analysis beherrschenden Disciplin zu thun habe. EULER war der erste, der auf Grund seiner ausgedehnten geometrischen und analytischen Untersuchungen in der Theorie der elliptischen Integrale und nach Auffindung seines berühmten Additionstheorems dieser Transcendenten mit der ihm eigenen mathematischen Divinationsgabe voraussah, dass mit Hülfe einer passenden Bezeichnung die Berechnung der Ellipsenbögen und anderer analoger Transcendenten von fast ebenso allgemeiner Anwendung werden könnte als die der Kreisbögen und Logarithmen, und LEGENDRE, der sich vom Jahre 1786 an anhaltend mit den hierher gehörigen Untersuchungen beschäftigte, rechtfertigte diese Voraussagung.

Derselbe veröffentlichte vor der Zusammenfassung seiner Resultate in der Theorie der elliptischen Integrale einige grössere Arbeiten über diesen Gegenstand:

> 1) *Mémoire sur les intégrations par d'arcs d'ellipse* (mém. de l'Acad. des Sciences de Paris 1786), I, II,

worin nicht nur die durch die Arbeiten von FAGNANO, EULER und LANDEN bekannten Sätze bewiesen wurden, sondern zugleich schon ein Beginn der Transformationstheorie der elliptischen Integrale in der analytischen Auffassung dieser Sätze sich kundgab, indem gezeigt wird, wie man die Rectification der Ellipse auf die von zwei andern aus einer unendlichen Reihe willkührlich gewählten Ellipsen reduciren kann, und

> 2) *Mémoire sur les Transcendantes elliptiques* (Paris 1793),

in welchem bereits die Eintheilung der elliptischen Integrale in solche verschiedener Gattungen, die Reduction der Integrale der einzelnen Gattungen auf ihre einfachsten Normalformen und die Auswerthung der elliptischen Integrale durch eine möglichst genaue Annäherung gegeben ist.

LEGENDRE fasste sodann alle diese Untersuchungen in dem Werke:

> *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de Transcendantes et sur les Quadratures* (Paris 1811–19)

und später in dem

> *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes* (Paris 1825–26, 2 vols.)

zusammen, welches letztere Werk sich im Wesentlichen durch neue Resultate nur in den Cap. 28, 29, 30, 31, vor allem durch eine neue Modulnkette von dem ersteren unterscheidet.

Wenn auch das Erscheinen und Bekanntwerden des *traité* schon mit den ersten Arbeiten ABEL's und JACOBI's in der Theorie der elliptischen Transcendenten zusammenfällt, so ziehen wir es doch vor, schon an dieser Stelle von jenem grossen Werke zu reden, weil man einerseits den *traité* als das Sammelwerk der Entdeckungen LEGENDRE's in der Theorie der elliptischen Integrale zu betrachten hat, andererseits aber auch, wie LEGENDRE in seinem Briefe vom 30. November 1827 an JACOBI angiebt, der erste Theil desselben bereits 1825 gedruckt und am 12. September 1825 der Pariser Akademie vorgelegt, der zweite Theil schon 1826 gedruckt, also vor dem Eintreten der beiden grossen Mitarbeiter in der Theorie der elliptischen Transcendenten vollendet war; man wird sich bei Besprechung der weiteren Entwicklung der Theorie jedoch stets zu vergegenwärtigen haben, dass ABEL und JACOBI zur Zeit der Veröffentlichung ihrer ersten Arbeiten, wie noch später näher ausgeführt werden soll, nur die *exercices* und nicht den *traité* von LEGENDRE kannten, also nicht im Besitze grade jener Zusätze zu den *exercices* waren, welche in der That einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie kennzeichneten und in der verallgemeinerten Auffassung von ABEL und JACOBI für den ganzen weiteren Verlauf der Transcendentenlehre von so grosser Bedeutung werden sollten.

> »Es ist LEGENDRE's unvergänglicher Ruhm, – so charakterisirt DIRICHLET in seiner Gedächtnissrede auf JACOBI das grosse Werk LEGENDRE's – in den eben erwähnten Entdeckungen (von FAGNANO, EULER, LANDEN, LAGRANGE) die Keime eines wichtigen Zweiges der Analysis erkannt und durch die Arbeit eines halben Lebens auf diesen Grundlagen eine selbständige Theorie errichtet zu haben, welche alle Integrale umfasst, in denen keine andere Irrationalität enthalten ist als eine Quadratwurzel, unter welcher die Veränderliche den vierten Grad

> nicht übersteigt. Schon EULER hatte bemerkt, mit welchen Modificationen sein Satz auf solche Integrale ausgedehnt werden kann; LEGENDRE, indem er von dem glücklichen Gedanken ausging, alle diese Integrale auf feste canonische Formen zurückzuführen, gelangte zu der für die Ausbildung der Theorie so wichtig gewordenen Erkenntniss, dass sie in drei wesentlich verschiedene Gattungen zerfallen. Indem er dann jede Gattung einer sorgfältigen Untersuchung unterwarf, entdeckte er viele ihrer wichtigsten Eigenschaften, von welchen namentlich die, welche der dritten Gattung zukommen, sehr verborgen und ungemein schwer zugänglich waren. Nur durch die andauerndste Beharrlichkeit, die den grossen Mathematiker immer von Neuem auf den Gegenstand zurückkommen liess, gelang es ihm hier, Schwierigkeiten zu besiegen, welche mit den Hülfsmitteln, die ihm zu Gebote standen, kaum überwindlich scheinen mussten.«

Die nachfolgende Darstellung der Arbeiten von ABEL und JACOBI macht es nöthig, wenn auch nur kurz, auf eine Analyse der von LEGENDRE in dem ersten Theile seines Werkes niedergelegten Untersuchungen einzugehen, um so mehr, als wir danach den unmittelbaren Einfluss dieser Untersuchungen auf die von ABEL und JACOBI bei der Behandlung der elliptischen Transcendenten befolgten Methoden besser werden wahrnehmen und schätzen können.

Nachdem LEGENDRE nachgewiesen, dass das Integral

$$\int \frac{P\,dx}{R},$$

worin P eine rationale Function von x und

$$R = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}$$

ist, auf die festen Grundformen

$$\int \frac{dx}{R}, \quad \int \frac{x\,dx}{R}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{R}, \quad \int \frac{dx}{(1+nx)R}$$

reducirt werden kann, schafft er mit Hülfe der linearen Transformation

$$x = \frac{p+qy}{1+y}$$

die ungraden Potenzen der Variablen des Polynoms R^2 heraus, und führt die leicht herstellbare Form des allgemeinen elliptischen Integrales

$$\int \frac{Q\,d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

von einem algebraischen Theile abgesehen auf die drei Normalformen der »**elliptischen Functionen oder Transcendenten**«

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta} = F, \quad \int \Delta\, d\varphi = E, \quad \int \frac{d\varphi}{(1 + u \sin^2 \varphi)\Delta} = \Pi$$

zurück.

Mit dieser Reduction auf feste Normalformen ist aber das Fundament der Theorie der elliptischen Integrale gelegt; es sind die wesentlichen irreductibeln Integrale gefunden, welche der Quadratwurzel aus einem Polynome vierten Grades zugehören, und es ist damit eine Reduction geleistet, die später mit Zuhülfenahme der Eigenschaft dieser drei Integralklassen, entweder garnicht, oder nur in der Unendlichkeit algebraisch oder in zwei verschiedenen Punkten logarithmisch unendlich zu werden, die Veranlassung zur Eintheilung der allgemeinen ABEL'schen Integrale in solche erster, zweiter und dritter Gattung geworden ist.

Die zunächst folgenden Untersuchungen LEGENDRE's sind dem Additionstheorem der elliptischen Integrale gewidmet, jener grossen und so folgenreichen Entdeckung EULER's, die LEGENDRE in der Einleitung zu seinem *traité* mit den Worten charakterisirt:

> »EULER par une combinaison qu'on peut regarder comme fort heureuse, quoique ces hazards n'arrivent qu'à ceux qui savent les faire naître, trouva l'intégrale algébrique complète d'une équation différentielle composée de deux termes séparés, mais semblables, dont chacun n'est intégrable que par des arcs de sections coniques. Cette découverte importante donna lieu à son auteur de comparer d'une manière plus générale qu'on ne l'avait fait avant lui, non-seulement les arcs d'une même ellipse, d'une même hyperbole, ou d'une même lemniscate, mais en général toutes les transcendantes contenues dans la formule $\int \frac{P\,dx}{R}$, où P est une fonction rationelle de x, et R la racine quarrée d'un polynome en x du quatrième degré.«

Für die Integrale erster Gattung wird der EULER'schen Differentialgleichung die Integralgleichung

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu)$$

substituirt, und als äquivalente algebraische Relation zwischen den trigonometrischen Functionen der Amplituden die Gleichung

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1 - c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

gefunden; eine Ausdehnung des EULER'schen Additionstheorems für Integrale erster Gattung sah LEGENDRE darin, dass man die Gleichung

$$0 = \frac{m\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{n\,dy}{\sqrt{R(y)}} + \frac{p\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots$$

zu Grunde legt, die nach dem EULER'schen Satze offenbar ebenfalls ein algebraisches Integral hat, und darin für $z, \ldots$ algebraische Functionen von x und y annimmt, war dagegen der Ansicht, dass die Untersuchungen von LAGRANGE (*Mélanges de la société royale de Turin*, tome IV), welcher die Fälle der algebraischen Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

ermitteln wollte, in denen X und Y nicht gleichartige Functionen verschiedener Variabeln sind, nicht über die EULER'sche Gleichung hinausführen können, wie es ihm denn überhaupt sehr zweifelhaft erschien, ob mit zwei Termen allein die Verallgemeinerung der EULER'schen Gleichung nach irgend einer Richtung hin möglich sei. Man sieht, dass LEGENDRE weit von der Erkenntniss entfernt war, dass sehr allgemeine algebraische Beziehungen für in einander transformirbare elliptische Differentialien existiren, und dass ihm ebenso die Existenz des berühmten Theorems, durch welches ABEL später der Integralrechnung eine so grosse und unerwartete Ausdehnung gegeben, und mit dessen Geschichte wir uns später zu beschäftigen haben werden, völlig verborgen geblieben.

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung führte LEGENDRE zur Behandlung der Multiplicationsgleichung

$$F(\varphi_n) = nF(\varphi),$$

welche er durch die Recursionsformel

$$\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1} = \frac{2\Delta\cos\varphi\sin\varphi_n}{1 - c^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_n}$$

auflöst. Die Division des unbestimmten Integrales erster Gattung wird auf die Auflösung einer Gleichung $n^{2\text{ten}}$ Grades, die Division für das vollständige Integral F^1 auf eine Gleichung $\frac{n^2-1}{2}^{\text{ten}}$ Grades zurückgeführt; für die speciellen Fälle, in denen $c^2 = 2(\sqrt{2}-1)$, $c^2 = \frac{1}{2}$ und $c^2 = \frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{3})$ ist, und die später durch die Untersuchungen von ABEL eine hervorragende Bedeutung bekamen, löst LEGENDRE das Problem der Dreitheilung des vollständigen Integrales mit Hülfe von Quadratwurzeln.

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung giebt LEGENDRE Gelegenheit, die längst bekannten Sätze über Ellipsen und Hyperbelbögen aus einem einheitlichen analytischen Gesichtspunkte herzuleiten, und die Untersuchung der Beziehungen der vollständigen Integrale zweiter Gattung zu denen erster Gattung führt ihn zu der nach ihm benannten Relation

$$FE' - F'E - FF' = \frac{\pi}{2},$$

welche erst nach einem halben Jahrhundert eine Erweiterung auf hyperelliptische Integrale in dem berühmten *Braunsberger* Schulprogramm durch WEIERSTRASS erhalten und sodann von RIEMANN mit Hülfe allgemeiner functionentheoretischer Betrachtungen auf alle ABEL'schen Integrale ausgedehnt worden ist. Zugleich entwickelt LEGENDRE auch für die vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren allgemeine Integrale er angiebt, und die später von JACOBI weiter verwerthet wurden.

Die Untersuchungen über die Integrale erster und zweiter Gattung schliessen mit der Reihenentwicklung der vollständigen Integrale ab.

Weit grössere Schwierigkeiten bereiten LEGENDRE die Integrale dritter Gattung vermöge des Hinzutretens einer dritten sie bestimmenden Grösse, des Parameters, sowohl bei der Aufstellung der Additionstheoreme für das Argument und den Parameter, als auch bei der numerischen Berechnung derselben, da für dieselben Tafeln mit doppeltem Eingange erst wieder anwendbar wurden durch die später zu besprechende, grosse Entdeckung JACOBI's, der zufolge die Integrale dritter Gattung sich durch ϑ-Functionen ausdrücken liessen, in deren Argument das zugehörige Integral erster Gattung eintritt.

Nachdem LEGENDRE die Beziehung entwickelt, die zwischen zwei elliptischen Integralen dritter Gattung mit dem Parameter n und dem Parameter $\frac{c^2}{n}$ besteht, und die sich in zwei irreductible Fälle sondert, je nachdem $n > 0$ oder $n < 0$ und $(n) \geq c^2$, und $n < 0$ und $(n) < c^2$ ist – wonach die beiden zu diesen reellen Parametern gehörigen elliptischen Integrale dritter Gattung sich von einem Integrale erster Gattung abgesehen im

ersten Falle um eine arc. tg-Function, im zweiten um einen Logarithmus unterscheiden – wird das Additionstheorem für die Integrale dritter Gattung und die allgemeinen elliptischen Integrale hergestellt.

Hier tritt nun in dem grossen Werke eine neue, von allem früheren wesentlich verschiedene und für die weitere Entwicklung der Theorie der Transcendenten so folgenreiche Anschauung zu Tage. LEGENDRE wendet sich der Untersuchung der LANDEN'schen Transformation zu, nach welcher die Substitution $\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin\varphi$ die Beziehung ergiebt

$$F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi),$$

wenn $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$ gesetzt ist, und stellt eine entsprechende Relation für die zu dem ursprünglichen und transformirten Integralmodul gehörigen elliptischen Integrale zweiter Gattung auf; er zeigt, dass sich aus dieser einfachen analytischen Beziehung die Sätze von LANDEN, wonach sich ein Hyperbelbogen durch zwei Ellipsenbögen ausdrücken lässt etc., unmittelbar ergeben, dass aber weit wichtiger als alle diese geometrischen Folgerungen das in der erwähnten Substitution liegende Transformationsprincip sei, wonach durch wiederholte Anwendung dieser Substitution eine Kette von unendlich vielen Moduln hergestellt werden kann, welche Veranlassung geben zu einfachen Methoden für die Berechnung der vollständigen und unvollständigen elliptischen Integrale erster Gattung, zu Ausdrücken, wie z. B.

$$F^1(c) = \frac{\pi}{2}(1 + c^0)(l + c^{00})(l + c^{000}) \dots$$

und ähnlichen Annäherungsformeln für die Berechnung der Integrale zweiter Gattung.

Mit Recht wundert sich LEGENDRE darüber, dass diese Substitution sowie überhaupt der analytische Gesichtspunkt für die Verwandlung elliptischer Integrale in einander den früheren Mathematikern völlig fremd geblieben:

> »Mais beaucoup d'autres substitutions peuvent conduire à de semblables résultats, et quand on considère combien de transformations analytiques ont été employées par MACLAURIN et D'ALEMBERT, dans leurs recherches sur les intégrales qui peuvent être exprimées par des arcs de sections coniques, on a lieu de s'étonner que la transformation, qui met en évidence les propriétés nombreuses de l'échelle des modules, leur ait

entièrement échappé et que cette découverte ait été réservée à LANDEN qui d'ailleurs n'en a tiré qu'un médiocre parti et qui n'a pas même vu qu'elle fournissait une méthode très simple pour calculer par approximation les arcs des sections coniques. On s'étonnera moins que la même découverte ait échappé à EULER, si on observe que la belle intégrale due à ce grand géomètre l'a conduit à comparer entre elles les diverses valeurs d'une même transcendante, comme on compare les arcs d'une même courbe, ce qu'il a fait avec une élégance et une généralité qui ne laissent rien à désirer. Mais on ne voit dans aucun de ses Mémoires, qu'il ait fait varier les constantes ou les paramètres de ses fonctions, et qu'il ait ainsi passé d'une courbe à une autre, comme on le fait dans les comparaisons qui dépendent de l'échelle des modules.«

Und gleichsam zur Entschuldigung des von ihm hochverehrten EULER fügt LEGENDRE später hinzu:

»En terminant ces observations nous signalerons comme un fait digne de remarque, qu'EULER n'ait rien écrit à l'occasion du Mémoire de LANDEN imprimé dans les Transactions philosophiques de 1775, d'où il faut conclure que ce Mémoire n'est pas parvenu à sa connaissance ; car dans la hypothèse contraire, cet illustre Géomètre aurait sans doute, suivant son usage, publié ses propres réflexions sur une découverte analytique qui devait particulièrement l'intéresser.«

Einer Fortsetzung dieser der Transformationstheorie angehörigen Untersuchungen werden wir schon in einem der nächsten Kapitel des *traité* begegnen; zunächst wird jedoch eine Beziehung zwischen zwei Integralen dritter Gattung mit verschiedenen reellen Parametern aufgestellt, nach welcher sich dieselben nur um Integrale erster und zweiter Gattung unterscheiden, und nach Zurückführung der Integrale dritter Gattung mit imaginärem Parameter auf zwei ähnliche Integrale mit reellem Parameter, durch welche der eben ausgesprochene Satz allgemeine Gültigkeit erlangt, die noch nachher zu besprechende Relation hergeleitet, welche als der Satz von der Vertauschung des Arguments und des Parameters bezeichnet und später auf alle ABEL'schen Integrale ausgedehnt wurde.

Die behandelten Substitutionen gaben LEGENDRE Gelegenheit, einige Integrale mit dritten oder vierten Wurzeln aus Polynomen zweiten und dritten Grades, sowie mit Quadratwurzeln aus gewissen Polynomen

höheren Grades auf elliptische Integrale zu reduciren, Untersuchungen, die später in allgemeinerer Form wieder aufgenommen werden, nachdem erst die Theorie der Transformation eine wesentliche Erweiterung erfahren. Unter anderem hatte LEGENDRE das Integral

$$\int \frac{dz}{\left(\sqrt[3]{1-z^3}\right)^2}$$

auf doppelte Art auf ein elliptisches Integral reducirt und dadurch die Beziehung gefunden

$$F(b,\omega) = \sqrt{3} \cdot F(c,\varphi),$$

worin $b = \sqrt{1-c^2}$ und

$$\sin\omega = \frac{\sin\varphi\left(2\sqrt{3} + (2-\sqrt{3})\sin^2\varphi\right)}{2+\sqrt{3}\cdot\sin^2\varphi}$$

ist, war somit auf eine Substitution dritten Grades geführt worden, die unmittelbar die allgemeine Transformation dritten Grades mit der Modularbeziehung $\sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = 1$ ergab und somit eine neue Modulnkette und neue Annäherungsformeln für die Berechnung der elliptischen Integrale lieferte. LEGENDRE erkannte sogleich die Wichtigkeit dieser Entdeckung, sah aber das Eigenthümliche seines Resultates nicht in der später von JACOBI aufgedeckten analytischen Bedeutung für die Umkehrungsfunction des elliptischen Integrales erster Gattung, sondern vielmehr in seiner Beziehung zur Integralrechnung, in seiner Bedeutung für die numerische Auswerthung der elliptischen Integrale und vorzüglich in dem merkwürdigen Umstande, dass man durch eine unendliche Reihe von Substitutionen immer wieder dieselbe analytische Form des vorgelegten Integrales erhält:

> »c'est sans doute un résultat très remarquable, que cette multitude infinie de transformations, qu'on peut faire subir à la même fonction $F(c,\varphi)$, sans changer sa nature et en conservant le même rapport entre la fonction et sa transformée pour toutes les valeurs de l'amplitude ; on chercherait vainement dans la variété infinie des transcendantes un second exemple d'une fonction qui se reproduirait sous tant de formes différentes et à laquelle on pourrait appliquer plus justement qu'à la spirale logarithmique, la devise que lui avait donné JACQUES BERNOULLI : eadem mutata resurgit«.

Endlich ist noch, indem aus zwei Transformationen dritten Grades die Multiplication mit dem Factor 3 zusammengesetzt wird, – ein Weg, den auch JACOBI, ohne die Methode von LEGENDRE zu kennen, später zur Verallgemeinerung der LEGENDRE'schen Untersuchungen eingeschlagen – nachgewiesen, dass die Auflösung der Gleichung 9ten Grades für die Dreitheilung auf die Auflösung von zwei Gleichungen dritten Grades zurückgeführt werden kann, ein Problem, das wiederum von ABEL später aufgenommen und in seiner ganzen Allgemeinheit gelöst wurde.

Nunmehr werden ganze Klassen von Integralen höherer algebraischer Irrationalitäten untersucht, die auf elliptische Integrale reducirbar sind, und von denen vorzüglich diejenigen, welche dritte oder vierte Wurzeln aus Polynomen dritten oder vierten Grades oder Quadratwurzeln aus reciproken Polynomen sechsten Grades enthalten, später für die allgemeine Theorie der Integrale von Bedeutung geworden sind.

Im Uebrigen enthält der erste Band des *traité* abgesehen von den Entwicklungen der elliptischen Integrale nach den sinus und cosinus der Amplitude und von der Berechnung einiger bestimmter Integrale, die durch elliptische Integrale ausgedrückt werden können, noch eine Reihe von Anwendungen der entwickelten Theorie der elliptischen Integrale auf die Behandlung von geometrischen und mechanischen Problemen, die uns im Folgenden nicht interessiren.

Der zweite Theil liefert eine Theorie der EULER'schen Integrale und der Kugelfunctionen, »damit das neue Werk als eine ziemlich vollständige Bearbeitung der nächst den Kreisbögen und den Logarithmen bekanntesten und nützlichsten Transcendenten betrachtet werden könne,« und giebt ausserdem Methoden für die Berechnung der Integrale erster und zweiter Gattung und auf Grund dieser construirte Tafeln:

> »pour que l'usage des Fonctions elliptiques puisse être introduit dans l'analyse à l'instar des Fonctions circulaires et logarithmiques. Il ne peut être question de réduire en tables les fonctions de la troisième espèce, puisqu'elles contiennent deux constantes arbitraires outre la variable principale, et qu'ainsi il faudrait que ces tables fussent à triple entrée, chose tout-à-fait inexécutable«.

Das grosse Werk LEGENDRE's besitzt nicht bloss dadurch seinen Werth und seine bleibende Bedeutung, dass es der Theorie der elliptischen Integrale eine selbständige Stellung in der Analysis geschaffen und die Veranlassung zur Gründung der Lehre von den Transcendenten und der allgemeinen Functionentheorie geworden, sondern dass in demselben auch

eine grosse Reihe von Gesichtspunkten gegeben, Resultate hergeleitet und Methoden entwickelt sind, die ein bleibender Besitz der Analysis geworden und genau in der von LEGENDRE gegebenen Form die Ausgangspunkte für die späteren Arbeiten ABEL's und JACOBI's gebildet haben. Ich hebe dies hier besonders hervor, weil eine Aeusserung JACOBI's, die uns DIRICHLET berichtet, leicht zu Missverständnissen Veranlassung geben kann; JACOBI antwortete einem Freunde, der ihn eines Tages auffallend verstimmt fand und nach dem Grunde dieser Verstimmung fragte: »Sie sehen mich eben im Begriff, dieses Buch (LEGENDRE's *exercices*) auf die Bibliothek zurückzuschicken, mit welchem ich entschiedenes Unglück habe. Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studirt habe, hat es mich immer zu eignen Gedanken angeregt und ist dabei immer etwas für mich abgefallen. Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfall inspirirt worden«.

Es war eben das Fremdartige des Stoffes, das LEGENDRE länger als zwanzig Jahre hindurch keinen Mitarbeiter in diesem Zweige der Analysis finden liess.

> »Après m'être occupé pendant un grand nombre d'années, sagt LEGENDRE in der Vorrede zum ersten Supplement des *traité*, de la théorie des fonctions elliptiques, dont l'immortel EULER avait posé les fondemens, j'ai cru devoir rassembler les résultats de ce long travail dans un Traité, qui a été rendu public au mois de janvier 1827. Jusque là les géomètres n'avaient pris presque aucune part à ce genre de recherches; mais à peine mon ouvrage avait-il vu le jour, à peine son titre pouvait-il être connu des savans étrangers, que j'appris avec autant d'étonnement que de satisfaction, que deux jeunes géomètres, M. M. JACOBI (C.–G.–J.) de Koenigsberg et ABEL de Christiania, avaient réussi, par leurs travaux particuliers, à perfectionner considérablement la théorie des fonctions elliptiques dans ses points les plus élevés.«

Und ABEL und JACOBI haben für ihre Arbeiten, wie schon oben hervorgehoben, nicht nur Anknüpfungspunkte an die LEGENDRE'schen Untersuchungen gefunden, sondern eine Reihe von Methoden und Gesichtspunkten aus dem *traité* von LEGENDRE entnehmen können, auf Grund deren sie freilich mit Hinzufügung grosser und überraschender Gedanken, neuer und überaus fruchtbarer Methoden den gewaltigen und ungeahnten Ausbau der Theorie der elliptischen Transcendenten bewerkstel-

ligt haben. Dies hat aber auch JACOBI nachher selbst in vollem Umfange anerkannt; er schreibt am 27. Mai 1832 an LEGENDRE:

> »dans une annonce que j'en ai faite à la fin du huitième volume de M. CRELLE, j'ai cherché à relever les mérites impérissables du Géomètre qui, outre les découvertes nombreuses et importantes dont il a enrichi la science, est parvenu à fonder deux disciplines grandes et étendus par les travaux glorieux de sa vie, lesquelles formeront désormais l'α et l'ω de toute étude mathématique. J'ai profité en même temps de cette occasion pour parler d'ABEL et de son grand théorème, que vous avez encore le mérite d'avoir approfondi le premier, et d'avoir montré à la postérité que son développement est la grande tâche qui lui reste à remplir ...«

Es ist interessant, über die in den *exercices* vereinigten Untersuchungen LEGENDRE's einige Worte aus dem Munde des im Lobe nie überschwänglichen Mathematikers zu vernehmen, der wie kein anderer competent war, über die Bedeutung der in der Theorie der elliptischen Transcendenten gemachten Entdeckungen ein Urtheil abzugeben; in einem Briefe von GAUSS an SCHUMACHER heisst es:

> »Geneigt, wie ich von jeher gewesen bin, jeden neuen originellen oder genialen Gedanken mit Liebe aufzunehmen*), wurde ich von der wirklich neuen Idee in Mossotis Aufsatz bei meiner ersten Lecture frappirt.
>
> *) Ich brauche Ihnen wohl nicht zu sagen, dass die neuliche wunderliche Recension von LEGENDRE's *Exercices de calcul Intégral* in unseren G. A. (Gött. gel. Anz. 1817. Aug. 14) nicht von mir ist, da dieses Werk so manches der oben erwähnten Art enthält.«

Wollte ich nunmehr streng historisch verfahren, so müsste ich nach der Besprechung des LEGENDRE'schen *traité* an der Hand der aus dem Nachlasse von GAUSS veröffentlichten Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Transcendenten, die fast sämmtlich aus einer viel früheren Zeit als die Entdeckungen ABEL's und JACOBI's, ja selbst als ein Theil derer von LEGENDRE stammen, die Theorie, wie sie sich GAUSS zum grossen Theil schon am Ende des vorigen Jahrhunderts aufgebaut hatte, zu entwickeln suchen; ich ziehe es jedoch vor, einerseits im Interesse der grösseren Klarheit in der Darlegung der verschiedenen Theile der Theorie der elliptischen Transcendenten, andererseits um die gewaltige, das ganze Gebiet

der Transcendenten umfassende Ausdehnung der GAUSS'schen Resultate deutlicher hervortreten zu lassen, die Untersuchungen von GAUSS erst nach Besprechung der Arbeiten von ABEL und JACOBI darzulegen, und somit eine Vergleichung anstellen zu können zwischen dem Umfange der Leistungen und der Tragweite der Methoden dieser drei grossen Mathematiker unseres Jahrhunderts. Doch muss jedenfalls schon hier auf die bekannte Stelle in den im Jahre 1801 veröffentlichten »*disquisitiones arithmeticae*« hingewiesen werden, welche den Mathematikern die Richtung der GAUSS'schen Untersuchungen in der Theorie der elliptischen Integrale zu erkennen gab und ABEL vielleicht sogar den Weg vorzeichnete, auf welchem er die algebraischen Theile der elliptischen Transcendenten ausbaute; sie lautet:

> »Ceterum principia theoriae, quam exponere aggredimur, multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares sed pari successu ad multas alias functiones transcendentes applicari possunt, e. g. ad eas, quae ab integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ pendent, praetereaque etiam ad varia congruentiarum genera: sed quoniam de illis functionibus transcendentibus amplum opus peculiare paramus, de congruentiis autem in continuatione disquisitionum arithmeticarum copiose tractabitur, hoc loco solas functiones circulares considerare visum est. Imo has quoque, quas summa generalitate amplecti liceret, per subsidia in art. sq. exponenda ad casum simplicissimum reducemus, tum brevitati consulentes, tum ut principia plane nova huius theoriae eo facilius intelligantur;«

und es mag zur Würdigung der Bedeutung dieser Stelle auf die Worte hingewiesen werden, welche lange vor der Veröffentlichung des GAUSS'-schen Nachlasses aus der Theorie der elliptischen Functionen von **dem** Mathematiker gesprochen worden, der auf dem andern grossen Gebiete der Mathematik, welches ebenfalls LEGENDRE zu einer selbständigen Disciplin gemacht und welches gleichfalls GAUSS zu einer ungeahnten Höhe und Ausdehnung erhoben, ein würdiger Nachfolger dieser beiden grossen Mathematiker gewesen ist:

> »In der Einleitung zum letzten Abschnitte der *disquis. arithm.*, welcher der Kreistheilung gewidmet ist, sagt DIRICHLET in seiner Gedächtnissrede auf JACOBI, hatte GAUSS im Vorbeigehen bemerkt, dass dasselbe Princip, worauf seine Kreistheilung beruht, auch auf die Theilung der Lemniscate anwendbar sei;

> und in der That liegt das GAUSS'sche Princip, nach welchem die Wurzeln der zu lösenden Gleichung so in einen Cyclus zu bringen sind, dass jede von der vorhergehenden auf dieselbe Weise abhängt, der Abhandlung ABELs über die Theilung der Lemniscate wesentlich zu Grunde. Wenn aber für die Kreistheilung längst bekannte Eigenschaften der trigonometrischen Functionen genügten, um die Wurzeln dem GAUSS'schen Princip gemäss zu ordnen, so war für den Fall der Lemniscate zu einer ähnlichen Anordnung, ja um nur die Möglichkeit einer solchen zu erkennen, eine Einsicht in die Natur der Wurzeln erforderlich, welche nur das Princip der doppelten Periodicität gewähren konnte. Die vorher erwähnte Aeusserung ist also durch ABEL's Abhandlung zu einem unwidersprechlichen Zeugnisse geworden, dass GAUSS seiner Zeit weit vorauseilend, schon zu Anfang des Jahrhunderts, das Princip der doppelten Periode erkannt hatte. Dieses Zeugniss ist jedoch erst durch die spätere Arbeit ABEL's bekannt geworden und thut daher seinem und JACOBI's Anrecht an diese Erfindung keinen Abbruch«.

Bei der folgenden Darstellung der in den Jahren 1826–29 von ABEL und JACOBI in der Theorie der elliptischen Transcendenten gemachten Entdeckungen, welche den eigentlichen Gegenstand dieser Blätter bilden soll, werde ich die historische Folge ziemlich streng festzuhalten suchen, um einerseits den stetigen Fortschritt der beiden genannten Mathematiker in der Bewältigung jener schwierigen analytischen Aufgaben, welche, um mich einer Wendung RICHELOT's zu bedienen, diesem Jahrhundert zur Lösung anheimfielen, besser verfolgen, andererseits aber auch die gegenseitigen Beziehungen der Arbeiten dieser beiden Mathematiker zu einander klarer hervortreten lassen zu können.

Zuvor mag nur noch in Betreff der im Folgenden gebrauchten Benennungen bemerkt werden, dass die Unterscheidung zwischen elliptischen Integralen und elliptischen Functionen, wie sie JACOBI in die Analysis eingeführt, und wie sie jetzt seit nunmehr 50 Jahren allgemein üblich ist, gleich vom Beginne der nachfolgenden Darstellung an festgehalten werden soll, wenn auch gerade in der Zeit, mit welcher sich diese Blätter beschäftigen, eine Einigung der Mathematiker in der Wahl der Worte und Bezeichnungen nicht erfolgt war. Wir wissen aus dem nunmehr veröffentlichten Briefwechsel zwischen LEGENDRE und JACOBI, wie entschieden ersterer sich dagegen sträubte, dass die Mathematiker von der durch seine Schriften üblich gewordenen Benennung und Bezeichnung abgingen;

»Je devrais borner là ma lettre,« schreibt LEGENDRE am 16. Juli 1829 nach Veröffentlichung der *Fundamenta nova* an JACOBI, »et ne vous point parler des changements de nomenclature que vous proposez dans votre art. 17. pag. 31 ; mais comme d'autres personnes pourraient vous représenter qu'en cela vous avez fait une chose qui doit m'être désagréable, je ne vois pas pourquoi je vous cacherais ce que je pense de cette proposition. Je vous dirai donc franchement que je n'approuve pas votre idée et que je ne vois pas de quelle utilité elle peut être pour vous et pour la science. La plus simple des fonctions elliptiques savoir l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 \varphi}}$ jouit de tant et de si belles propriétés, considérée seule, elle est liée par de si beaux rapports avec les deux autres fonctions dites de la seconde et de la troisième espèce que l'ensemble de ces trois fonctions forme un système complet auquel on pourrait donner un autre nom que celui de fonctions elliptiques, mais dont l'existence est indépendante de toute autre fonction. La nomenclature méthodique que j'ai proposée des 1793 dans mon mémoire sur les **transcendantes elliptiques** a été adoptée généralement, vous l'avez trouvée établie ; quelles sont donc vos raisons pour vous écarter de l'usage général ? Vous faites schisme avec M. ABEL et avec moi, vous faites schisme avec vous-même, puisqu' après avoir appelé **fonctions elliptiques** les sinus, cosinus et autres fonctions trigonométriques de l'amplitude vous êtes encore obligé d'appeler **fonctions de troisième espèce** celles que je désignes ous le même nom. N'est ce pas que veut dire le titre de l'art. 56 pag. 160 ? Pourquoi désignez-vous comme moi la fonction de 3e espèce tantôt par $\Pi(u, a)$, tantôt par $\Pi(u, a + K', \varkappa')$? Quelle liaison y a-t-il entre ces fonctions et la première qui n'est plus suivant vous qu'un argument de fonction ? Je vous laisse à expliquer toutes ces choses. Du reste je vous fait part confidentiellement de ces observations don't vous ferez tel usage que vous voudrez et auxquelles je ne donnerai jamais aucune publicité. Il me suffira de vous avoir témoigné ma surprise sur l'inconvenance et la bizarrerie de votre idée ; elle n'altérera en rien les sentimens d'estime et d'affection que j'ai conçus pour vous et dont je vous renouvelle l'assurance«.

JACOBI, auf der Reise nach Paris begriffen, sucht sich in der Antwort vom 19. August 1829 von Frankfurt aus mit den Worten zu rechtfertigen:

»Il me fallait absolument une dénomination pour les fonctions sin am, cos am, etc., dont les propriétés répondent parfaitement à celles des fonctions sin, cos, dites circulaires. D'un autre côté, l'application importante qu'on fait de la théorie des Fonctions Elliptiques an Calcul intégral rendait nécessaires les distinctions et les dénominations que vous avez introduites dans l'Analyse, et qui ont été accueillies par tous les Géomètres. J'ai donc trouvé convenable d'appeler les intégrales auxquelles vous donnez le nom de **Fonctions Elliptiques de la première**, **seconde**, **troisième espèce**, **Intégrales Elliptiques de la première**, **seconde**, **troisième espèce** et d'étendre ou d'attribuer de préférence la dénomination de Fonctions Elliptiques aux sin am, cos am, Δ am, analogiquement comme on nomme Fonctions Circulaires les sinus, cosinus, etc. Si cela vous déplaît, toute autre dénomination me sera agréable. Dans tous les cas je crois que nous deviendrons aisément d'accord sur cet objet« ;

aber trotzdem scheint sich LEGENDRE selbst nach der persönlichen Bekanntschaft mit JACOBI bis zu seinem Tode nicht mehr mit der Wahl der JACOBI'schen Benennungen befreundet zu haben; sein letzter Brief an denselben vom 30. Juni 1832 enthält die Worte:

»J'aurais un double plaisir, si ces nouveaux résultats étaient obtenues par le secours de nos fonctions elliptiques qui vous appartiennent autant qu'à moi, quoique vous ne vouliez pas exprimer la même chose par le même nom«.

Der Herausgeber der im Jahre 1839 erschienenen *œuvres complètes* von ABEL, HOLMBOE sagt in den notices sur la vie de l'auteur:

»En juillet 1825 il sollicita auprès du gouvernement un bénéfice de 600 Sp. par an pour continuer ses recherches dans l'étranger, et notamment à Paris, pendant deux ans. On lui accorda aussitôt sa demande, et le même été il partit pour Berlin, suivi de quelques jeunes littérateurs et savants Norvégiens« –

und fügt im Avertissement des zweiten Bandes hinzu:

»Tous les mémoires contenus dans ce volume out été écrits avant que notre auteur commençât ses voyages, excepté les mémoires XV, XVI et XXII, dont malheureusement le premier n'est pas terminé«.

Wir dürfen somit die aus dem Nachlasse von ABEL im zweiten Bande der *œuvres complètes* veröffentlichten Untersuchungen als die ersten bedeutenden Arbeiten über diesen Gegenstand nach LEGENDRE betrachten, und gerade diese werden uns am besten einen Ueberblick über die Ausdehnung der von ABEL in der Theorie der elliptischen Transcendenten schon zu der Zeit angestellten Untersuchungen gewähren, in der er seine ersten Arbeiten veröffentlichte.

Die älteste Arbeit aus dem Nachlasse ABEL's: *Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi(x)$ déterminée par l'équation $f(y)\,dy - dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)\cdots(a_m-y)} = 0$, $f(y)$ étant une fonction quelconque de y, qui ne devient pas zéro ou infinie lorsque $y = a, a_1, a_2 \ldots a_m$*, untersucht die Umkehrung der Integralfunction

$$\int \frac{f(y)\,dy}{(a-y)(a_1-y)\cdots(a_m-y)} = x,$$

und zeigt, wenn auch durch Schlüsse, die in der kurzen Aufzeichnung weder allgemein noch streng erscheinen, dass, wenn $y = \varphi(x)$ gesetzt wird, $\varphi(v + 2n\alpha + 2n_1\alpha_1 + \cdots + 2n_m\alpha_m) = \varphi(v)$ sein müsste, wenn $n + n_1 + n_2 + \cdots + n_m = 0$ und

$$\alpha_r = \int^{\alpha_r} \frac{f(y)\,dy}{(a-y)(a_1-y)\cdots(a_m-y)}$$

ist, und bestimmt die Nullen und Unendlichen dieser Function. ABEL war somit schon im Sommer 1825, von dem Umkehrungsproblem der hyperelliptischen Integrale ausgehend, zur Feststellung der doppelten Periodicität der elliptischen Functionen gelangt, scheint jedoch nicht zu der Erkenntniss gekommen zu sein, die uns erst viel später von JACOBI eröffnet worden, dass es ein Umkehrungsproblem der hyperelliptischen Integrale in dem oben definirten Sinne überhaupt nicht giebt, weil eindeutige Functionen einer Variabeln oder vieldeutige von endlicher Mehrdeutigkeit mit mehr als zwei Perioden nicht existiren, und die obige Gleichung in φ eine Function definiren würde, welche eine unendlich kleine Periode hat – erst einer späteren Zeit als der in diesen Blättern zu behandelnden gehört die grosse und berühmte Arbeit JACOBI's an, in welcher der Weg vorgezeichnet wird, auf dem das Umkehrungsproblem der hyperelliptischen

Integrale gelöst werden kann, wiewohl die Inangriffnahme dieses schwierigen Problems, wie wir später sehen werden, schon in die erste Zeit der wissenschaftlichen Thätigkeit JACOBI's fällt.

Während sich die obige Arbeit ABEL's ganz von dem Gange und den Methoden der LEGENDRE'schen Untersuchungen entfernt und zeigt, dass ABEL durch Umkehrung der Integralfunction der Theorie der elliptischen Transcendenten völlig neue und umfassende analytische Ideen zuzuführen im Begriff war, schliessen sich die folgenden, noch vor dem Sommer 1825 niedergeschriebenen Arbeiten, deren Resultate später zum Theil von ABEL selbst in dem Journal: *Det kongelige norske Videnskabersselskabs Skrifter*, Trondhjem 1827 veröffentlicht wurden, mehr den Untersuchungen von LEGENDRE über die Integrale dritter Gattung an. Aber man erkennt auch hier das Streben ABEL's, allgemeinere Integralklassen zu behandeln als die der elliptischen Integrale; nachdem er in dem Aufsatze: »*Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*« für die Differentialgleichung $0 = sy + t\frac{dy}{dx}$, in welcher $s = f(x)$, $t = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ gesetzt wird, bei gehöriger Bestimmung der unteren Grenzen eine Beziehung erwiesen, welche, wenn $f(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x)$, also $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}$ gesetzt wird, in die Relation

$$\sqrt{\varphi(a)} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi(x)}} - \sqrt{\varphi(x)} \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi(a)}}$$
$$= \sum \tfrac{1}{2}(n-m)\, \alpha_{m+n+2} \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \int \frac{a^m\, da}{\sqrt{\varphi(a)}},$$

also in den Satz von der Vertauschung des Argumentes und des Parameters für hyperelliptische Integrale übergeht, wendet er sich in einem »*Extension de la théorie précédente*« betitelten Aufsatze zu der Untersuchung der analogen Eigenschaft für die Integrale der linearen Differentialgleichung

$$0 = sy + s_1 \frac{dy}{dx} + s_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + s_m \frac{d^m y}{dx^m},$$

und findet dieselbe in einer eleganten, symmetrisch geformten Beziehung, aus der sich die obigen Formeln als specielle Fälle herleiten lassen.

Es kann kein Zweifel obwalten, dass ABEL schon im Jahre 1825 nicht etwa nur an einer erweiterten und auf neuer Grundlage aufgebauten Theorie der elliptischen Transcendenten arbeitete, sondern dass sein Streben von vornherein, wesentlich anders als es bei JACOBI der Fall war, darauf sich richtete, eine allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentiale zu entwickeln, wie zum Theil schon die oben erwähnten Arbeiten, die

sich auf jene allgemeineren Integralfunctionen bezogen, erkennen liessen. Wir finden nämlich noch in seinem Nachlasse aus jenem Jahre einen Aufsatz, betitelt: *Sur la comparaison des fonctions transcendantes*, der die Ausdehnung des EULER'schen Additionstheorems für elliptische Integrale auf beliebige Integrale algebraischer Differentiale zum Gegenstande hat. Wenn die Gleichung

$$0 = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots + \alpha_m y^m$$

gegeben ist, in der die α ganze Functionen von x sind, und man stellt mit dieser Gleichung eine andere

$$0 = q + q_1 y + \cdots + q_{m-1} y^{m-1}$$

zusammen, in welcher die q ganze Functionen von x mit den unbestimmten Coefficienten $a, a_1, \ldots$ bedeuten, so gilt für die Lösungen $x_1, x_2, \ldots x_n$ der durch Elimination der Grösse y erhaltenen Gleichung $s = 0$ die Integralbeziehung

$$\int^{x_1} f(x,y)\,dx + \int^{x_2} f(x,y)\,dx + \cdots + \int^{x_n} f(x,y)\,dx = C + \varrho,$$

worin ϱ eine algebraisch-logarithmische Function der a bedeutet, und ABEL fügt hinzu:

> »il n'est pas difficile de se convaincre que, quel que soit le nombre μ, on peut toujours faire en sorte que $n - \mu$ devienne indépendant de μ«.

Wir sehen hier das berühmt gewordene Theorem, das wohl mit Recht als das Fundamentaltheorem der neueren Analysis bezeichnet werden darf, schon in dem Jahre 1825 genau in derselben Gestalt aufgezeichnet, wie es in den späteren Veröffentlichungen ABEL's stets wiederkehrt; auf eine Besprechung des Inhaltes desselben und des Schicksales seiner Veröffentlichung werde ich später zurückzukommen Gelegenheit haben.

Endlich finden wir noch aus der ersten Hälfte des Jahres 1825 in dem Nachlasse von ABEL eine Arbeit, welche im Keime die erst nach einigen Jahren im »*Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*« veröffentlichten Untersuchungen enthält, zunächst jedoch wenigstens in dem ausgeführten Theile als eine Vorarbeit zu der ersten von ABEL im CRELLE'schen Journal veröffentlichten und gleich nachher zu besprechenden Arbeit zu betrachten ist und die Ueberschrift trägt: *Théorie des transcendantes elliptiques*.

Die Arbeit, welche sich eng an die LEGENDRE'schen Entwicklungen anschliesst, beschäftigt sich zunächst mit der Reduction des elliptischen Integrales

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}},$$

worin $R = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$, auf die Grundformen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},$$

und mit der allgemeinsten zwischen elliptischen Integralen bestehenden Relation, die in der Gestalt

$$k \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + k' \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \cdots + L^{(\nu)} \int \frac{dx}{(x-a_\nu)\sqrt{R}}$$
$$= A \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} + A' \log \frac{P' + Q'\sqrt{R}}{P' - Q'\sqrt{R}} + \cdots$$

gefunden wird. Dann wendet sich ABEL zu Untersuchungen, die ihn in den verschiedensten Formen beständig beschäftigt haben, und auf die wir in seinen späteren grossen Arbeiten noch ausführlich werden zurückkommen müssen, nämlich zur Behandlung der Fragen von der Reduction elliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen. Als nothwendige Bedingung dafür, dass elliptische Integrale von der Gestalt

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + k' x + k}{x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + l' x + l} \; \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

auf eine logarithmische Function der Form

$$A \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$$

reducirbar sind, findet er, dass die Lösungen des Nenners einer Gleichung von der Form

$$P^2 - Q^2 R = 0$$

genügen müssen; das Problem, alle Integrale von der Form $\int \frac{(k+x)\,dx}{\sqrt{R}}$ zu finden, welche auf jenen logarithmischen Ausdruck zurückführbar sind, wird mit der Auflösung einer Gleichung der Form $P^2 - Q^2 R = 1$ in Verbindung gebracht, und diese Auflösung wiederum mit der Periodicität der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{R}$ in Beziehung gesetzt. Endlich wird auf

»une relation remarquable qui existe entre plusieurs intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \quad «$$

hingewiesen, indem gezeigt wird, dass, wenn diese Integrale auch im Allgemeinen irreductibel sind, nichts destoweniger das Integral $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ zwischen passenden Grenzen genommen – und zwar sind dies die Lösungen der Gleichung $R = 0$ – durch die drei anderen Integrale ausdrückbar ist.

Die weiteren dieser Arbeit angehörigen Abschnitte zeigen deutlich, dass ABEL schon im Jahre 1825 damit umging, eine systematische Theorie der elliptischen Transcendenten zu veröffentlichen, indem er auch solche Abschnitte in den Entwurf aufnahm, deren Inhalt er zum Theil nur durch die Ueberschrift andeutete, und für welche er lediglich auf die *exercices* von LEGENDRE verwies.

Nachdem ich aus dem Nachlasse ABEL's das Wesentlichste von dem, was sich auf die Theorie der elliptischen Transcendenten bezieht und dem Jahre 1825 angehört, hervorgehoben habe, gehe ich dazu über, die grosse Reihe von Untersuchungen zu besprechen, durch welche in den Jahren 1826–29 in wunderbarer, wechselseitiger Arbeit von ABEL und JACOBI der mathematischen Wissenschaft neue und grosse Gebiete erobert wurden.

Die erste hierher gehörige Arbeit ABEL's, ursprünglich in französischer Sprache geschrieben, findet sich in's Deutsche übersetzt unter dem Titel »*Ueber die Integration der Differentialformel* $\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$, *wenn* R *und* ϱ *ganze Functionen sind*« im ersten Bande des CRELLE'schen Journals, welcher im Jahre 1826 ausgegeben wurde. ABEL stellt sich in dieser Arbeit die Aufgabe, alle Differentialien von der Form $\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$, wo ϱ und R ganze Functionen von x sind, zu finden, deren Integrale durch eine Function von der Form $\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$ ausgedrückt werden können, indem er am Ende der Arbeit hinzufügt, dass dieses Problem das allgemeinste für die Reduction derartiger Integrale auf logarithmische Functionen sei, da er einen Satz bewiesen habe, nach welchem, wenn ein Integral $\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$ auf Logarithmen reducirbar ist, der logarithmische Ausdruck stets in der Form $A \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$ darstellbar sein müsse, worin A eine Constante, p und q ganze Functionen

von x bedeuten, ein Satz, welcher ein specieller Fall eines später von ABEL in seinem »*précis*« entwickelten sehr allgemeinen Theorems ist.

ABEL führt die Lösung der gestellten Aufgabe auf die Behandlung der unbestimmten Gleichung $p_1^2 N - q^2 R_1 = 1$ zurück, in welcher $R = N \cdot R_1$ ist, und findet, dass, wenn man die Kettenbruchentwicklung

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \ddots}}$$

aufstellt, die Auflösungen der Gleichung

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

in welcher die Grösse s in einer bestimmten Beziehung zu den μ-Grössen steht, durch den Kettenbruch gegeben sind:

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \ddots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}.$$

Soll nun $p_1^2 N - q^2 R_1 = a$, worin a eine Constante bedeutet, aufgelöst werden, so muss eine der s-Grössen constant sein, und setzt man daher eine derselben, welche alle, wenn R ein Polynom $2n^{\text{ten}}$ Grades, vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade sind, gleich einer solchen constanten Grösse, so erhält man $n - 1$ Bedingungen zwischen den Coefficienten von R; die Function ϱ wird dann vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade sein. Ist $N = 1$, also

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \ddots}}$$

so lautet der merkwürdige von ABEL entwickelte Satz:

> »Lorsqu' il est possible de trouver pour ϱ une fonction entière telle que
>
> $$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}\right),$$
>
> la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ sera périodique, et aura la

forme suivante :

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \ddots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \ddots}}}}}}}$$

et réciproquement, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a cette forme, il est toujours possible de trouver pour ϱ une fonction entière qui satisfait à l'équation

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}\right).$$

La fonction y est donnée par l'expression suivante :

$$y = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \ddots + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r}}}} \text{«}.$$

Es mag noch hinzugefügt werden, dass, wie sich aus späteren Aufzeichnungen ergiebt, Abel sich ursprünglich ein viel allgemeineres Problem als das in der eben erwähnten Abhandlung behandelte gestellt hat, indem er überhaupt die Bedingungen für die Reducirbarkeit der Integrale algebraischer Differentiale auf Integrale niederer Ordnung aufsuchte, ein Problem, dessen Lösung er freilich in dieser Allgemeinheit trotz der mannigfachen und wunderbar reichen Mittel, die er sich selbst schuf, schon in den ersten Anfängen aufgeben musste.

Die eben besprochene Arbeit ist wahrscheinlich auf der Reise nach Paris von Abel persönlich in Berlin Crelle für sein eben gegründetes Journal überreicht worden, also, wie sich auch schon aus der oben erwähnten Nachlassarbeit ergiebt, jedenfalls vor der Abreise aus Norwegen vollendet worden.

Auf seiner Reise nach Berlin, Wien, Paris hat sich Abel anhaltend mit den verschiedensten und weitestgehenden Studien, die Theorie der Transcendenten betreffend, beschäftigt.

> »ABEL me dit, sagt HOLMBOE, que lors de son séjour à Paris en 1826, il avait déjà achevé la partie essentielle des principes qu'il avançait dans la suite sur ces fonctions, et qu'il aurait bien voulu remettre la publication de ses découvertes jusqu'à ce qu'il en eût pu composer une théorie complète, si en attendant Mr. JACOBI ne s'était mis sur les rangs«.

Ein an CRELLE aus Paris vom 9. August 1826 gerichteter Brief kommt wieder auf das allgemeine Additionstheorem zurück, das, wie wir oben sahen, bereits vor der Mitte des Jahres 1825 von ABEL gefunden und aufgezeichnet war,

> »une propriété générale des fonctions dont la différentielle est algébrique, consiste en ce que la somme d'un nombre **quelconque** de fonctions peut être exprimée par un nombre déterminé des mêmes fonctions« —

und an HOLMBOE schreibt ABEL über dasselbe Theorem aus Paris am 24. October 1826:

> »je viens de finir un grand traité sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'institut, ce qui aura lieu lundi prochain. J'ose dire sans ostentation que c'est un traité dont on sera satisfait. Je suis curieux d'entendre l'opinion de l'institut là-dessus. Je ne manquerai pas de t'en faire part«.

ABEL hatte sich in der Bedeutung und Tragweite dieses fundamentalen Satzes nicht getäuscht; doch unterblieb in der Pariser Akademie die Beurtheilung dieser Arbeit, so dass ABEL sich veranlasst sah, drei Jahre später, am 6. Januar 1829, von Christiania aus an CRELLE eine Arbeit unter dem Titel: *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes* zu senden, die 1829 im 4. Bande des Journals für Mathematik veröffentlicht wurde, deren kurze Darstellung genau der im Nachlass befindlichen oben berührten Aufzeichnung entspricht und nur noch mit dem Zusatze versehen ist:

> »Je me propose de développer dans une autre occasion de nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront un grand jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit.«

Leider ist von den Anwendungen dieses allgemeinen, von JACOBI mit dem Namen des ABEL'schen Theorems bezeichneten Satzes nichts von ABEL veröffentlicht, auch bis jetzt nichts darauf bezügliches aus seinem Nachlasse bekannt geworden.

ABEL selbst ist in seinem späteren Briefwechsel mit LEGENDRE nie auf die der Akademie eingereichte Arbeit zurückgekommen; noch in einem vom 25. November 1828 aus Christiania datirten Briefe an LEGENDRE sagt er, ohne sich auf dieselbe zu beziehen:

> »Les fonctions elliptiques jouissent d'une certaine propriété bien remarquable et que je crois nouvelle ...Vous verrez que rien n'est plus simple que d'établir cette propriété générale. Elle m'a été fort utile dans mes recherches sur les fonctions elliptiques. En effet j'ai fondé sur elle toute la théorie de ces fonctions«.

JACOBI aber erkannte sofort nach der Veröffentlichung im CRELLE'schen Journal die ganze Bedeutung dieses Fundamentaltheorems der Analysis, und gab seiner Bewunderung in einem aus Königsberg vom 14. März 1829 datirten Briefe an LEGENDRE in den Worten Ausdruck:

> »Quelle découverte de M. ABEL que cette généralisation de l'intégrale d'EULER ! A-t-on jamais vu pareille chose ! Mais comment s'est-il fait que cette découverte, peut-être la plus importante de ce qu'a fait dans les Mathématiques le siècle dans lequel nous vivons, étant communiquée à votre Académie il y a deux ans, elle a pu échapper à l'attention de vous et de vos confrères ?«

Diese Frage JACOBI's beantwortet LEGENDRE in einem Schreiben vom 8. April 1829 mit den Worten:

> »Je ne terminerai pas cette lettre sans répondre à l'article de la vôtre qui concerne le beau mémoire de M. ABEL qui a été imprimé dans le cahier précédent du Journal de CRELLE, et qui avait été présenté à l'académie par son auteur dans les derniers mois de 1826. M. POISSON était alors président de l'académie, les commissaires nommés pour examiner le mémoire furent M. CAUCHY et moi. Nous nous aperçumes que le mémoire n'était presque pas lisible, il était écrit en encre très-blanche,

> les caractères mal formés ; il fut convenu entre nous qu'on demanderait à l'auteur une copie plus nette et plus facile à lire. Les choses en sont restées là ; M. CAUCHY a gardé le manuscrit jusqu'ici sans s'en occuper, l'auteur M. ABEL paraît s'en être allé sans s'occuper de ce que devenait son mémoire, il n'a pas fourni de copie et il n'a pas été fait de rapport. Cependant j'ai demandé à M. CAUCHY, qu'il me remette le manuscrit qui n'a jamais été entre mes mains, et je verrai ce qu'il y a à faire, pour réparer, s'il est possible, le peu d'attention qu'il a donné, à une production qui méritait sans doute un meilleur sort«.

Und JACOBI sowohl wie LEGENDRE bedienten sich sehr bald des ABEL'schen Theorems als eines besonders wirksamen Hülfsmittels zur Erweiterung der Grenzen der Analysis. Am 2. Juli 1830 schreibt JACOBI an LEGENDRE:

> »En ce qui regarde mes propres occupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières et que je voudrais avoir finies avant de retourner aux Fonctions Elliptiques et aux transcendantes d'un ordre supérieur qui sont de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a+a_1x+\cdots+a_nx^n}}$. Je crois entrevoir à présent que toutes ces transcendantes jouissent des propriétés admirables et inattendues auxquelles on peut être conduit par le théorème d'ABEL, qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendantes qui répondent à différentes valeurs de x,«

und nicht lange darauf beschäftigte sich auch LEGENDRE, wie das dritte Supplement zu seinem *traité* zeigt, eingehend mit dem ABEL'schen Theoreme für hyperelliptische Integrale;

> »en travaillant pour mon propre compte, schreibt er am 24. März 1832 an CRELLE, j'ai éprouvé une grande satisfaction, de rendre un éclatant hommage au génie de Mr. ABEL, en faisant sentir tout le mérite du beau théorème dont l'invention lui et due, et auquel on peut appliquer la qualification de **monumentum aere perennius**«.

In der Besprechung dieses dritten Supplementes von LEGENDRE im 8ten Bande des CRELLE'schen Journals finden sich noch die schönen und denkwürdigen Worte JACOBI's:

»Wir halten es (das ABEL'sche Theorem), wie es in einfacher Gestalt ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspricht, für die grösste mathematische Entdeckung unserer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte grosse Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen kann«.

JACOBI selbst war es, der nach einer Reihe von Jahren nachwies, wie das ABEL'sche Theorem die Wege ebnete zur Erweiterung der Analysis in der Herstellung der Umkehrungsfunctionen der höheren Integrale und der Behandlung der vielfach periodischen Functionen mehrerer Variabeln, und somit die grossen analytischen Arbeiten von WEIERSTRASS und RIEMANN ermöglichte.

Im Jahre 1841 veröffentlichte LIBRI in den Memoiren der Pariser Akademie den von ABEL im Jahre 1826 derselben überreichten Aufsatz. Nachdem darin ähnlich wie in den anderen kurzen Darstellungen des berühmten Theorems die Existenz der Gleichung

$$\int f(x_1, y_1)\, dx_1 + \int f(x_2, y_2)\, dx_2 + \cdots + \int f(x_\mu, y_\mu)\, dx_\mu = v$$

erwiesen, und eine doppelte Methode zur Bestimmung der von den eingeführten Parametern $a, a', a'', \ldots$ algebraisch-logarithmisch abhängigen Function v entwickelt worden, zeigt ABEL, dass sich eine beliebige Anzahl von gleichartigen Integralen algebraischer Differentiale auf eine feste Anzahl eben solcher Integrale zurückführen lässt, und liefert Methoden zur Bestimmung dieser unveränderlichen Zahl, ähnlich denen, welche den neueren algebraischen Untersuchungen über die Entwicklung der Lösungen algebraischer Gleichungen in unendliche Reihen zu Grunde liegen; endlich geht ABEL noch zur Specialisirung seines Theorems für diejenigen Integrale über, für welche die algebraische Irrationalität unter dem Integral die Lösung einer binomischen algebraischen Gleichung ist und leitet daraus die expliciten Ausdrücke des Additionstheorems für die elliptischen und hyperelliptischen Integrale her.

Nachdem ich zum Zwecke einer abschliessenden Darstellung der Geschichte des ABEL'schen Theorems in der Zeit um einige Jahre vorgegriffen, gehe ich nunmehr wieder zu den anderweitigen, auf die Theorie der Transcendenten bezüglichen Arbeiten, mit denen sich ABEL in Paris beschäftigte, zurück, zu deren Charakterisirung ein Brief desselben an HOLMBOE aus Paris vom December 1826 dient:

»J'ai écrit un grand mémoire sur les fonctions elliptiques qui renferme des choses assez curieuses et qui ne manquera pas, je m'en flatte, de fixer l'attention du monde littéraire. Entre autres choses il traite de la division de l'arc de la lemniscate. Ah, qu'il est magnifique ! tu verras. J'ai trouvé qu'avec le compas et la règle on peut diviser la lemniscate en $2^n + 1$ parties égales, lorsque ce nombre $2^n + 1$ est premier. La division dépend d'une équation du degré $(2^n + 1)^2 - 1$; mais j'en ai trouvé la solution complète à l'aide des racines carrées. Cela m'a fait pénétrer en même temps le mystère qui a enveloppé la théorie de Mr. GAUSS sur la division de la circonférence du cercle. Je vois clair comme le jour ; comment il y est parvenu« ;

und ein zweiter Brief aus Paris vom 4. December 1826 an CRELLE, der auf dieselben Untersuchungen hinweist; in beiden Briefen spricht ABEL ausdrücklich die Meinung aus, dass GAUSS auf demselben Wege wie er zu den Sätzen gelangt ist, in deren Besitz zu sein dieser, wie wir oben gesehen, in dem letzten Abschnitte seiner *disquisitiones arithmeticae* behauptet – und wir werden später durch GAUSS selbst diese Ansicht bestätigt finden.

Endlich thut ABEL in einem auf der Rückreise in seine Heimath aus Berlin vom 4. März 1827 datirten Briefe an HOLMBOE noch einer grösseren Arbeit, die er vollendet hat, in den Worten Erwähnung:

»Mais voici le mémoire qui l'emporte sur tous les autres : *Théorie des fonctions transcendantes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier* ; mais différons de t'en faire part jusqu'à mon retour«.

Nun erst, nachdem ABEL wieder nach Norwegen zurückgekehrt, beginnt der grossartige Wettkampf zwischen ihm und JACOBI, der erst seit ganz kurzer Zeit sich mit der Theorie der elliptischen Transcendenten beschäftigte.

In den »*Extraits de deux lettres de Mr.* JACOBI *de l'Université de Koenigsberg à l'éditeur*« vom 13. Juni und 2. August 1827 veröffentlicht JACOBI in der im September 1827 ausgegebenen No. 123 der astronomischen Nachrichten von SCHUMACHER seine erste Entdeckung in der Theorie der Transformation der elliptischen Integrale.

»Les intégrales de la forme $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-cc\sin\varphi^2}}$ appartiennent d'après la diversité du module c à des transcendantes diverses. On ne

connait qu'un seul système de modules qu'on peut réduire l'un à l'autre, et Mr. LEGENDRE dans ses Exercices dit même qu'il n'y avait que ce seul. Mais en effet il-y-a autant de ces systèmes qu'il-y-a de nombres premiers, c'est-à-dire il-y-a un nombre infini de ces systèmes indépendans l'un de l'autre, dont chacun repond à un nombre premier, et dont le système connu repond au nombre premier 2.«

JACOBI spricht hier bereits ohne Beweis den allgemeinen Satz von der Transformation der elliptischen Integrale erster Gattung aus: $\sin\varphi = \frac{u}{v}$ gesetzt, worin u eine gewisse unpaare Function n^{ten} Grades von $\sin\psi$, v eine gewisse paare Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades dieser Grösse bedeutet, liefert die Beziehung

$$\int \frac{d\varphi}{1-c^2 sin^2\varphi} = m \int \frac{d\psi}{1-k^2 sin^2\psi},$$

was auch n für eine unpaare Zahl sein mag, und hebt ferner hervor, dass man jetzt $\sin\psi$ auf fast analoge Art durch $\sin\vartheta$ ausdrücken kann, und durch Zusammensetzung der beiden Integralgleichungen die Beziehung

$$\int \frac{d\varphi}{1-c^2 sin^2\varphi} = n \int \frac{d\vartheta}{1-c^2 sin^2\vartheta}$$

erhält, in welcher sich $\sin\varphi$ durch einen Bruch darstellt, dessen Zähler die unpaaren Potenzen von $\sin\vartheta$ bis zur $n^{2\,\text{ten}}$, der Nenner die paaren bis zur n^2-1ten enthält.

Dieser ohne Beweis und im ersten Briefe auch noch ohne Angabe des allgemeinen analytischen Transformationsausdruckes mitgetheilte Satz ist weiter für die Transformation dritten und fünften Grades wirklich ausgeführt und mit der Multiplication und Division für die Zahlen 3 und 5 in Verbindung gesetzt, von der JACOBI sagt:

»ainsi je donne ici pour la première fois la solution algébrique de l'équation du $9^{\text{ième}}$ degré, dont la trisection de notre transcendante dépend«.

Die Transformation dritten Grades war jedoch inzwischen von LEGENDRE in dem im Januar 1827 ausgegebenen *traité des fonctions elliptiques*, wie schon oben hervorgehoben, veröffentlicht worden, ohne dass JACOBI zur Zeit der Veröffentlichung seiner Arbeit noch davon Kenntniss hatte. Als LEGENDRE diese ersten Briefe JACOBI's an SCHUMACHER kennen lernte, war er durch die Existenz einer Transformation fünften Grades in

hohem Grade überrascht und konnte sich mit dem Gedanken von der Existenz einer zu einem beliebigen Grade gehörigen algebraischen Transformation so wenig vertraut machen, dass er bestimmt glaubte, wie er dies in dem aus Paris vom 30. November 1827 an JACOBI gerichteten Schreiben ausdrücklich erklärt, dass derselbe durch eine Induction irregeführt worden, wiewohl JACOBI in dem zugleich veröffentlichten Briefe vom 2. August 1827 auch den allgemeinen analytischen Transformationsausdruck, wenn auch ohne Beweis, wirklich hinstellte und zwar in der Form

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi''' + \varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi''' - \varphi}{2}\right)} \cdots$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi^{(p-2)} \pm \varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi^{(p-2)} \mp \varphi}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(45^\circ \mp \frac{\varphi}{2}\right)$$

angab, worin die Amplituden $\varphi^{(m)}$ durch die Gleichung

$$F(k, \varphi^{(m)}) = \frac{m}{p} F(k, 90^\circ)$$

definirt waren, wenn p eine beliebige unpaare Zahl bedeutet.

Aber LEGENDRE hatte nicht ganz Unrecht, an der Strenge der Schlüsse JACOBI's zu zweifeln, ja sogar er hatte sich zu schnell durch einen gleich näher zu besprechenden Brief desselben davon überzeugen lassen, dass die allgemeinen Transformationsausdrücke auch wirklich auf strengem Wege hergeleitet und verificirt worden waren; denn auf die von LEGENDRE an JACOBI gerichtete Bitte, ihm die leitenden Ideen anzugeben, die ihn einerseits zu dem Satze geführt, dass jedem Transformationsgrade auch immer eine rationale Transformation entspricht, andererseits ihm die analytischen Ausdrücke für eben diese Transformation geliefert haben, antwortet JACOBI in einem aus Königsberg vom 12. April 1828 datirten Briefe in einer für die Geschichte der elliptischen Functionen interessanten und denkwürdigen Stelle:

> »Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaîne des idées qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigueur géométrique. La chose

étant trouvée, on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant : La première chose que j'avais trouvée (dans le mars 1827), c'était l'équation $T = V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$; de là je reconnus que, pour un nombre n quelconque, la transformation était un problème d'Analyse algébrique **déterminé**, le nombre des constantes arbitraires égalant toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéterminés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. L'équation du quatrième degré à laquelle me mena la première ayant presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soupçonnais quelque rapport. Par un tâtonnement heureux, je remarquais dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à Mr. SCHUMACHER, la méthode étant générale et vérifiée par des exemples. Depuis, examinant plus de proche les deux substitutions $z = \frac{ay+by^3}{1+cy^2}$, $y = \frac{a'x+b'x^3}{1+c'x^2}$ sous la forme présentée dans ma première lettre, je vis qu'étant mis $x = \sin\operatorname{am}\frac{2K}{3}$, z devra s'évanouir, et comme, dans ladite forme, $\frac{b}{a}$ était positif, j'en conclus que y devra s'évanouir aussi. De cette manière je trouvai par induction la résolution en facteurs, laquelle étant confirmée par des exemples, je donnai le théorème général dans ma seconde lettre à Mr. SCHUMACHER. Ensuite, ayant remarqué l'équation $\sin\operatorname{am}(i\xi, \varkappa) = i\operatorname{tg}\operatorname{am}(\xi, \varkappa')$, j'en tirai la transformation de $\varkappa'$ en λ'. J'avais donc deux transformations différentes, l'une de $\varkappa$ dans un module plus petit λ, l'autre de $\varkappa'$ dans un module plus grand λ'. De là je fis la conjecture qu'en échangeant entre eux $\varkappa'$ et λ, $\varkappa$ et λ', on aurait l'expression analytique de la transformation complémentaire. Tout étant confirmé par des exemples, j'eus la hardiesse de vous adresser une première lettre, qui a été accueillie de vous avec tant de candeur. Les démonstrations n'out été trouvées que ci-après« ;

und ebenso lehrreich und interessant ist die Antwort LEGENDRE's, die er in einem Briefe vom 16. Juni 1828 von Paris aus JACOBI giebt:

»Je n'ai pu que toucher très-légèrement dans ma dernière lettre ce que j'avais à vous dire sur la communication pleine de franchise, que vous m'avez faite de la filiation des idées qui vous

> ont conduit à vos belles découvertes sur les fonctions elliptiques, je vois que nous avons couru tous deux des dangers, **vous** en annonçant des découvertes qui n'étaient pas encore revêtues du sceau d'une démonstration rigoureuse, et **moi** en leur donnant publiquement et sans restriction mon approbation tout entière. Nous n'avons pas à nous repentir ni l'un ni l'autre de ce que nous avons fait. D'ailleurs nous avions chacun nos raisons de nous conduire ainsi ; je ne dirai rien des vôtres, quant à moi je voyais très-clairement que des résultats tels que ceux que vous aviez obtenus, ne pouvaient être l'effet ni du hasard, ni d'une induction trompeuse, mais bien d'une théorie profonde et appuyée sur la nature des choses ...«.

Der oben erwähnte von JACOBI am 5. August 1827 an Legendre gerichtete Brief, der mit den schönen Worten beginnt:

> »Monsieur, un jeune Géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des Fonctions Elliptiques, auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que cette partie brillante de l'Analyse doit le haut degré de perfectionnement auquel elle a été portée, et ce n'est qu'en marchant sur les vestiges d'un si grand maître, que les Géomètres pourront parvenir à la pousser au delà des bornes qui lui ont été prescrites jusqu'ici. C'est donc à vous que je dois offrir ce qui suit comme un juste tribut d'admiration et de reconnaissance«,

hatte jedoch LEGENDRE – wenn auch, wie wir eben gesehen haben, nicht ganz mit Recht – davon überzeugt, dass JACOBI durch strenge Analyse zu seinem Theorem geführt worden, und liess denselben am 5. November 1827 mit grosser Wärme der französischen Akademie Bericht erstatten über die von JACOBI gemachten Entdeckungen.

Wenn p eine beliebige ungerade Zahl ist, führt JACOBI in diesem Briefe aus, so kann man durch eine Substitution

$$x = \frac{z\left(A + A'z^2 + \cdots + A^{\frac{p^2-1}{2}} z^{p^2-1}\right)}{B + B'z^2 + \cdots + B^{\frac{p^2-1}{2}} z^{p^2-1}}$$

zur Gleichung gelangen

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = p\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

und diese Substitution kann wiederum ersetzt werden durch

$$x = \frac{y\left(a + a'y^2 + \cdots + a^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1}\right)}{b + b'y^2 + \cdots + b^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1}},$$

$$y = \frac{z\left(\alpha + \alpha'z^2 + \cdots + \alpha^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}\right)}{\beta + \beta'z^2 + \cdots + \beta^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}},$$

welche den Differentialbeziehungen

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{p}{M}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}}$$

zugehören; dadurch ist aber die Existenz einer unendlichen Anzahl von Modulnketten erwiesen. Nach Ausführung der in den beiden früheren Briefen an SCHUMACHER veröffentlichten Formeln für die primäre und supplementäre Transformation bemerkt JACOBI:

> »Il n'y a que très-peu de temps que ces recherches ont pris naissances. Cependant elles ne sont pas les seules entreprises en Allemagne sur le même objet. M. GAUSS, ayant appris de celles-ci, m'a fait dire qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de 3 sections, 5 sections et de 7 sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent. Cette nouvelle, à ce qui me paraît, est bien intéressante«.

Durch diese Mittheilung veranlasst, hat sich LEGENDRE, der für GAUSS schon in Folge von Prioritätsstreitigkeiten mit demselben nicht günstig gestimmt war, in der am 30. November 1827 an JACOBI gerichteten Antwort zu den Worten hinreissen lassen:

> »Comment se fait-il que M. GAUSS ait osé vous faire dire que la plupart de vos théorèmes lui étaient connus et qu'il en avait fait la découverte dès 1808 ? Cet excès d'impudence n'est pas croyable de la part d'un homme, qui a assez de mérite personnel pour n'avoir pas besoin de s'approprier les découvertes des autres . . .« ;

und doch beruhten nicht bloss die Angaben von GAUSS, wie sich jetzt aus seinem Nachlasse unzweifelhaft ergiebt, auf Wahrheit, GAUSS war vielmehr schon seit langer Zeit allen bisher auf diesem Gebiete gemachten Entdeckungen weit vorausgeeilt. JACOBI nimmt auch in einem späteren Briefe an LEGENDRE vom 12. April 1828 GAUSS gegen die Vorwürfe LEGENDRE's in Schutz, freilich ohne die Grösse der Entdeckungen, die GAUSS schon dreissig Jahre zuvor gemacht, auch nur zu ahnen:

> »Quant à M. GAUSS, il n'a rien encore publié sur les Fonctions Elliptiques, mais il est certain, qu'il a eu de jolies choses. S'il a été prévenu et peut-être surpassé, c'est une juste peine de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux. Je ne le connais pas personnellement, ayant étudié la philologie à Berlin, où il n'y a pas des géomètres de distinction«.

Aber LEGENDRE kann nicht glauben, dass man Entdeckungen von einer solchen Tragweite unveröffentlicht lässt, wie es GAUSS leider in Wirklichkeit gethan;

> »si M. GAUSS, heisst es in einem Briefe LEGENDRE's an JACOBI vom 14. April 1828, était tombé sur de pareilles découvertes, qui surpassent à mes yeux, tout ce qui a été fait jusqu'ici en Analyse, bien sûrement il se serait empressé de les publier«.

Wir werden nachher Gelegenheit haben, auf die grossartigen und unvergleichlichen Arbeiten von GAUSS in dieser Disciplin zurückzukommen und näher auszuführen, wie ein grosser Theil der Entdeckungen in der Theorie der elliptischen Transcendenten, die in den nächsten Jahren von ABEL und JACOBI gemacht wurden, von GAUSS seit langer Zeit bereits vorweg genommen war.

Zugleich mit den eben besprochenen Arbeiten JACOBIS erschien im September 1827 im zweiten Heft des 2. Bandes des CRELLE'schen Journals der erste Theil der »*Recherches sur les fonctions elliptiques*« von ABEL, der bei Abfassung der beiden Theile dieses Memoirs von den vorher behandelten Untersuchungen JACOBI's, wie er selbst in einem Zusatze zu dem am 12. Februar 1828 CRELLE übersandten zweiten Theile dieses Aufsatzes erklärt, noch keine Kenntniss genommen:

> »Avant terminé le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par Mr. C. G. J. JACOBI, inserée dans le No. 123 année 1827 du recueil de Mr.

> SCHUMACHER, qui a pour titre »*Astronomische Nachrichten*«, m'est venu sous les yeux. Mr. JACOBI donne le théorème suivant : ... Ce théorème élégant, que M. JACOBI donne sans démonstration est contenu comme cas particulier dans la formule (227) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270). Nous allons démontrer cela«.

Nach allen Vorarbeiten ABEL's, die aus seinem Nachlasse bekannt geworden, nach dem Charakter der einen, im ersten Bande des CRELLE'schen Journals veröffentlichten Arbeit, nach der Form sowie dem Inhalte der *recherches* kann es nicht wohl zweifelhaft sein, dass ABEL schon seit fast zwei Jahren in dem Besitze einer allgemeinen und umfassenden Theorie der elliptischen Transcendenten war, und dass ihm daher jedenfalls in sehr vielen Punkten, wie auch JACOBI anerkannte, die Priorität der Entdeckung wird zugesprochen werden müssen, wenn auch wiederum JACOBI das Verdienst einer neuen und **selbständigen** Construction der Theorie der elliptischen Functionen nie wird aberkannt werden können.

Wir haben es in den *recherches* mit einer grossen, in sich vollendeten Theorie der elliptischen Transcendenten zu thun. Nachdem die Umkehrungsfunction des Integrales

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}, \; x = \varphi(\alpha)$$

definirt, das Additionstheorem dieser Function und der beiden zugehörigen

$$f(\alpha) = \sqrt{1 - c^2\varphi^2(\alpha)}, \; F(\alpha) = \sqrt{1 + e^2\varphi^2(\alpha)}$$

entwickelt worden, die doppelte Periodicität festgestellt, und die Nullen und Unendlichen dieser Functionen bestimmt sind, geht ABEL zur Entwicklung der Multiplicationsformeln für $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ in rationale Functionen von $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $F(\alpha)$ über.

Der Behandlung des Multiplicationsproblems folgt die Lösung der schwierigen Aufgabe der Division der elliptischen Functionen. ABEL weist die algebraische Ausdrückbarkeit der Functionen $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ als Functionen von $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $F(\alpha)$ in der Form nach:

$$\varphi(\beta) = \frac{1}{2n+1}\left\{\varphi_1(\beta) + \sqrt[2n+1]{C_1 + \sqrt{C_1^2 - D_1^{2n+1}}} + \dots \right.$$
$$\left. + \sqrt[2n+1]{C_{2n} + \sqrt{C_{2n}^2 - D_{2n}^{2n+1}}}\right\},$$

wenn

$$\varphi_1(\beta) = \varphi(2n+1)\beta + \frac{1}{2n+1}\left\{ \sqrt[2n+1]{A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1^{2n+1}}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \sqrt[2n+1]{A_{2n} + \sqrt{A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1}}} \right\},$$

und die Grössen C, D rationale Functionen von $\varphi_1(\beta)$, die Grössen A, B ebensolche Functionen von $\varphi(2n+1)\beta$ sind.

Für diese schöne und folgenreiche Entdeckung schreibt JACOBI die Priorität unbedingt ABEL zu; auf eine Anfrage LEGENDRE's, die auf einem Missverständniss einer Mittheilung JACOBI's beruhte, antwortet letzterer am 14. März 1829 aus Königsberg:

> »Vous supposez que j'ai trouvé des moyens à exprimer algébriquement les fonctions trigonométriques des amplitudes que vous désignez par α_m, en ajoutant que sans cela ma formule contiendrait des coefficients que je ne pourrai déterminer. Mais, Monsieur, ce que vous désirez est une chose **tout à fait impossible** dans le cas général, et qui ne s'exécute que pour des valeurs spéciales du module. Ma formule qui donne l'expression algébrique de $\sin\operatorname{am}(u)$ au moyen de $\sin\operatorname{am}(nu)$ suppose connue la section de la fonction entière. C'est ainsi qu'on savait résoudre algébriquement depuis plus d'un siècle les équations qui se rapportent à la division d'un arc de cercle, toutefois en supposant connue celle de la circonférence entière, cette dernière n'étant donnée généralement que dans ces derniers temps par les travaux de M. GAUSS ...... Vous voyez donc Monsieur, que M. ABEL a prouvé ce théorème important, comme vous le nommez, dans son premier *Mémoire sur les Fonctions Elliptiques*, quoiqu'il n'y ait pas traité de la transformation, et qu'il ne paraît pas même avoir songé, du temps qu'il le composa, que ses formules et ses théorèmes trouveront une pareille application. Quant à moi, je n'ai pas trouvé nécessaire de reproduire cette démonstration dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici sur cette matière, car il me reste trop à faire pour ne pas épargner mon temps le plus que possible«.

Die in den oben angegebenen algebraischen Ausdrücken vorkommenden Grössen

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right), \quad \varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$$

stellen sich als Lösungen einer unmittelbar aus der Divisionsgleichung hervorgehenden Gleichung $(2n+1)^2 - 1^{\text{ten}}$ Grades dar, und die Auflösung dieser Gleichung, welche in transcendenter Form als Lösungen die φ-Functionen der getheilten Perioden hat, führt ABEL vermöge allgemeiner Principien, die er für die Theorie der algebraischen Gleichungen entwickelt hat, auf die Auflösung **einer** Gleichung $2n+2^{\text{ten}}$ Grades und von $2n+2$ Gleichungen n^{ten} Grades zurück. Die Gleichungen n^{ten} Grades sind algebraisch auflösbar nach Methoden, die GAUSS für die Kreistheilung entwickelt hat, die Gleichung $2n+2^{\text{ten}}$ Grades ist es jedoch im Allgemeinen nicht, mit Ausnahme von speciellen Fällen wie $e=c$, welche die Sätze von der Theilung der Lemniscate durch Zirkel und Lineal liefern, die im zweiten Theile der *recherches* eingehend behandelt werden. Auch den Beweis oder eigentlich die Behauptung von der algebraischen Unauflösbarkeit dieser Gleichung will JACOBI ganz ABEL's Verdienst zugeschrieben wissen; in seinem vom 14. März 1829 datirten Briefe an LEGENDRE schreibt er:

> »J'ai été convaincu, et M. ABEL l'a confirmé, qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement ces équations du degré $n+1$; aussi, comme M. ABEL sait établir des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation algébrique peut être résolue, il pourra sans doute prouver cela avec toute la rigueur analytique. Quant aux cas spéciaux, comme, M. ABEL a promis en plusieurs lieux d'en traiter, je ne me suis pas encore occupé beaucoup de cet objet, sans doute très intéressant . . . . . . Le module transformé ou, ce qui revient an même, le régulateur qui y répond étant supposé connu, il faut encore résoudre une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ pour parvenir aux quantités $\sin^2 \operatorname{am} 2p\omega$, ou à la section de la fonction entière. Donc vous n'aviez eu qu'à résoudre une équation du second degré dans le cas de $n=5$. M. ABEL a prouvé que la méthode de M. GAUSS s'applique presque mot à mot à la résolution de ces équations, de sorte que ce ne sont que les équations aux modules qu'on ne sait pas résoudre algébriquement«.

Von der Lösung des Multiplications- und Divisionsproblems ausgehend, wird $\varphi(2n+1)\beta$ von ABEL als Quotient von zwei Doppelproducten dargestellt, deren Factoren linear aus $\varphi(\beta)$ zusammengesetzt sind,

»il faut remonter aux formules analytiques concernant la multiplication, données la première fois par M. ABEL«, sagt JACOBI in einem Briefe an LEGENDRE vom 12. April 1828,

und daraus, indem $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$ und $n = \infty$ gesetzt wird, die Entwicklung der Umkehrungsfunction des elliptischen Integrales erster Gattung $\varphi(\alpha)$ Doppelproducte und Doppelsummen hergeleitet, deren Factoren linear in α sind, somit ein eindeutiger analytischer Ausdruck für die bisher nur durch ihre Eigenschaften definirte Function gefunden; die Zurückführung der Doppelproducte und Doppelsummen auf einfache Producte und einfache Summen, die Product-Entwicklung und Partialbruch-Zerlegung der elliptischen Functionen erfolgt sodann ohne weitere Schwierigkeiten.

Mit der Veröffentlichung der *recherches* greift ABEL plötzlich weit über die durch JACOBI bekannt gewordenen Untersuchungen in der Theorie der elliptischen Transcendenten hinaus, wenn auch in diesem ersten Theile der Arbeit das Transformationsproblem der elliptischen Integrale noch keine Berücksichtigung gefunden. GAUSS schreibt am 30. Mai 1828 an SCHUMACHER über diese Arbeit ABEL's:

> »die, Ihnen gesagt, mir von meinen eignen Untersuchungen wohl 1/3 vorweggenommen hat, und mit diesen zum Theil selbst bis auf die gewählten bezeichnenden Buchstaben übereinstimmt«,

und CRELLE theilt am 18. Mai 1828 ABEL mit:

> »Voici ce que m'écrit Mr. GAUSS de Goettingue que j'avais également prié de m'envoyer quelque chose sur les fonctions elliptiques dont il s'occupe, comme j'ai appris, plus de 30 ans. »»D'autres occupations m'empêchent pour le moment de rédiger ces recherches. Mr. ABEL m'a prévenu au moins d'un tiers. Il vient d'enfiler précisément la même route dont je suis sorti en 1798. Ainsi je ne m'étonne nullement de ce que, pour la majeure partie, il en soit venu aux mêmes résultats. Comme d'ailleurs dans sa déduction il a mis taut de sagacité de pénétration et d'élégance, je me crois par cela même dispensé de la rédaction de mes propres recherches««.

Derselbe Band von CRELLE's Journal, der den ersten Theil der *recherches* brachte, enthält noch in dem am Ende des Jahres 1827 ausgegebenen dritten Hefte unter dem Titel: *Aufgaben und Lehrsätze* kurz ohne weitere Angabe des Beweises resp. der Auflösungsmethode das Theorem:

> »Si l'équation différentielle séparée

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4}},$$

> où α, β, γ, δ, ε, a sont des quantités **réelles**, est algébriquement intégrable, il faut nécessairement, que la quantité a soit un nombre **rationnel**«,

und das Problem:

> »Trouver une intégrale **algébrique** des deux équations séparées
>
> $$\frac{dx\sqrt{3}}{\sqrt{3+3x^2+x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{3-3y^2+y^4}}, \quad \frac{dx\sqrt{3}}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2+y^4}}.«$$

Das erwähnte Theorem zeigt deutlich, dass, wenn auch ABEL in dem ersten Theile der *recherches* des Transformationstheorems noch keine Erwähnung thut, er, wie er später selbst sagt, doch zur Zeit schon im Besitz nicht bloss der Theorie der von JACOBI behandelten rationalen, sondern der allgemeinen algebraischen Transformation gewesen, während die gestellte Aufgabe die Kenntniss eines Satzes voraussetzt, den ABEL in einer weit späteren Arbeit veröffentlicht, und ihre Lösung sich auf Periodenbetrachtungen stützt, welche wiederum die allgemeine Transformationstheorie in sich schliessen.

Noch bevor JACOBI die vorher besprochene grosse, im September 1827 erschienene Arbeit ABEL's gelesen hatte, veröffentlichte er aus Königsberg am 18. November 1827 unter dem Titel: *demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis* in Nr. 127 von SCHUMACHER's *astron. Nachrichten*, welche im December 1827 ausgegeben wurde, einen Beweis des in dem zweiten Briefe an SCHUMACHER ausgesprochenen allgemeinen rationalen Transformationstheorems mit den einleitenden Worten:

> »Proprietates functionum ellipticarum quasdam in Nr. 123 Astr. N. tradidi, quae novae atque attentione geometrarum non indignae videbantur. Disquisitiones, quibus illae originem debent, exinde ulterius continuatae sunt, egregiamque, ni fallor, amplificationem theoriae ab LEGENDRE datae praebent. Cum autem tempus, quo tractaui, hasce disquisitiones complectenti, finem imponere licebit, definire nondum queo; geometris non ingratum fore spero, si fragmentum harum disquisitionum, demonstrationem scilicet theorematis, in doctrina de transformatione functionum ellipticarum fundamentalis, hic breviter exponam. Multifariis idem modis variari posse, quisquis, perlecta demonstratione, facile intelliget«.

Der Beweis beruhte, wie wir wissen, auf der Abzählung der Constanten in der rationalen Substitution $y = \frac{U}{V}$ und der Aufstellung der Bedingungen, welche dadurch entstehen, dass diese Substitution die Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-\alpha y)(1-\alpha' y)(1-\alpha'' y)(1-\alpha''' y)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)}}$$

nach sich ziehen soll; indem JACOBI, unabhängig von ABEL, die eindeutige Umkehrungsfunction des elliptischen Integrals einführt, die φ-Function von ABEL, die JACOBI als sin am bezeichnet, spricht er, wie er es genau ebenso später in den Fundamenten thut, das Theorem aus, dass der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = M \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

durch den Ausdruck

$$1 - y = \frac{(1 \mp x)\left(1 \pm \dfrac{x}{\sin\operatorname{co}\operatorname{am}\dfrac{2K}{2n+1}}\right)^2 \cdots \left(1 - \dfrac{x}{\sin\operatorname{co}\operatorname{am}\dfrac{2nK}{2n+1}}\right)^2}{\left(1 - \varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}\dfrac{2K}{2n+1} x^2\right) \cdots \left(1 - \varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}\dfrac{2nK}{2n+1} \cdot x^2\right)}$$

genügt wird und leitet daraus den Werth für y ab, mit Hinzufügung der Worte:

> »Theorema hoc generaliter valet, non tamen omnes problematis solutiones amplectitur. Ulteriores vero huius argumenti disquisitiones in tractatu supra nominato reperientur«;

zugleich wird aber auch der analytische Ausdruck für $\sqrt[4]{\lambda}$ durch $\sqrt[4]{\varkappa}$ gegeben, über den sich LEGENDRE in seinem ersten Supplemente zu dem *traité* folgendermassen äusserte:

> »Lorsque deux fonctions de cette nature peuvent être exprimées l'une par l'autre, on peut supposer qu'elles appartiennent à la même échelle, et alors il existe entre leurs modules une équation très simple, quoique sous forme transcendante, laquelle tient lieu d'une équation algébrique, qui est en

général d'une recherche très difficile. Cette équation transcendante peut être regardée comme l'un des théorèmes les plus beaux et les plus féconds de cette branche d'analyse«.

Der eben erwähnte, ohne Angabe der Ideenverbindung aufgestellte analytische Ausdruck von $1 - y$, für den nur nachträglich die Verification gegeben wird, veranlasste LEGENDRE in dem aus Paris vom 9. Februar 1828 datirten Briefe mit Recht zu den Worten:

»Vous verrez dans ma note que cette belle démonstration m'aurait paru plus satisfaisante, si vous y eussiez joint quelques détails sur la série des idées qui vous ont conduit à la valeur supposée pour $1 - y$; vous pourrez avoir égard à mon observation dans les autres parties de vos recherches qui vous restent à publier« ;

doch erkannte er die grosse und fundamentale Bedeutung der JACOBI'schen Arbeit so sehr an, dass er in einer *Note sur les nouvelles propriétés des fonctions elliptiques découvertes par M. Jacobi* (Paris le 6 Février 1828) in der im Februar 1828 ausgegebenen Nr. 130 der SCHUMACHER'schen *astr. Nachrichten* die von JACOBI in demselben Journal veröffentlichten Transformationsarbeiten ausführlich bespricht; auch hier wieder, wie wiederholt schon früher, kann er seine Verwunderung darüber nicht unterdrücken, dass Transformationen beliebigen Grades ein elliptisches Integral in ein gleichgestaltetes verwandeln:

»ce qui multipliéra d'une manière encore plus prodigieuse les transformations de la fonction F, véritable Protée analytique«.

Aber bei aller Bewunderung für die JACOBI'schen Entdeckungen wiederholt sich auch die wohl berechtigte Klage über die Undurchsichtigkeit des JACOBI'schen Beweises:

»Ici on doit regretter que l'auteur remplisse la tâche qu'il s'est imposée par une sorte de divination, sans nous mettre dans le secret des idées dont la filiation l'a amené progressivement à la forme que doit avoir $1 - y$ pour satisfaire aux conditions du problème. Au reste cette suppression des idées intermédiaires s'explique assez naturellement par la nécessité de ne pas donner trop d'étendue à une démonstration, qui devoit être insérée

> dans un journal scientifique ; et il est à croire que quand l'auteur donnera un libre cours au développement de ses idées, dans un ouvrage composé ad hoc, il rétablira les intermédiaires dont l'absence se fait remarquer«,

und er fügt am Schlusse eine schon früher in einem Briefe an JACOBI angedeutete Verification der Transformationsformel hinzu.

Merkwürdig ist es, dass LEGENDRE in diesem Aufsatze mit keinem Worte der Untersuchungen ABEL's in der Theorie der elliptischen Functionen Erwähnung thut, zu deren Kenntniss er, wie wir aus dem vom 9. Februar 1828 an JACOBI gerichteten Briefe ersehen, bereits gekommen war;

> »J'avais déjà connaissance du beau travail de M. ABEL inséré dans le Journal de CRELLE. Mais vous m'avez fait beaucoup de plaisir de m'en donner une analyse dans votre langage, qui est plus rapproché du mien«.

Es ist eine eigenthümliche Thatsache, dass die so klar durchdachten, gut geschriebenen und übersichtlich geordneten Arbeiten ABEL's im Allgemeinen der mathematischen Welt weniger zugänglich erschienen als die JACOBI's; in einem vom 16. Juni 1828 datirten Briefe an JACOBI sagt LEGENDRE:

> »Je trouve comme vous que ces résultats qui sont fort intéressants, ont été présentés par leur jeune et ingénieux auteur, d'une manière fort méthodique, mais un peu embrouillée ; je ne vois pas par exemple, pourquoi il s'est si fort appesanti sur les propriétés des fonctions qu'il désigne par f et F ; sans doute il aurait pu atteindre son but sans le secours de ces fonctions« ;

und noch unumwundener spricht LEGENDRE sein Unbehagen bei der Lectüre ABEL'scher Arbeiten in einem am 8. April 1829 an JACOBI gerichteten Schreiben in den Worten aus:

> »car votre manière d'écrire est plus claire pour moi que celle de M. ABEL, qui en général ne me paraît pas suffisamment développée et laisse au lecteur beaucoup de difficultés à résoudre«.

Die von LEGENDRE so gern angenommene Erläuterung der grossen Arbeit ABEL's, des ersten Theiles der *recherches*, giebt JACOBI in einem aus Königsberg am 12. Januar 1828 an LEGENDRE gerichteten Briefe und zeigt das grosse Interesse, welches JACOBI dieser Arbeit entgegenbringt:

> »Depuis ma dernière lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les Fonctions Elliptiques de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être vous sera connu personnellement. C'est la première partie d'un Mémoire de M. ABEL, à Christiania, qu'on m'a dit avoir été à Paris il y a deux ou trois ans, inséré dans le second cahier du second volume du *Journal des Mathématiques pures et appliquées* publié à Berlin par M. CRELLE. La continuation doit avoir été publiée dans ces jours dans le cahier troisième dudit Journal ; mais elle ne m'est parvenue pas encore. Comme je suppose, que ce Mémoire ne vous soit pas encore connu, je vous en veux raconter les détails les plus intéressants. Mais, pour plus de commodité, j'avancerai le mode de notation dont je me sers ordinairement« ;

und dieses Interesse wurde auch von andern Mathematikern getheilt:

> »Depuis quelque temps, schreibt CRELLE am 18. Mai 1828 an ABEL, on commence à apprécier vos ouvrages de plus en plus. Mr. FUSS m'écrit de St. Pétersbourg qu'il en a été ravi«,

und LEGENDRE schreibt nicht lange darauf am 12. August 1828 in der Vorrede zu dem ersten Supplemente* seines *traité*:

> »Une connaissance approfondie des plus belles méthodes de l'analyse et l'heureux emploi de plusieurs idées fort ingénieuses se font remarquer dans les productions de ces deux jeunes géomètres. La science a pris dans leurs mains un tel essor, qu'il est à croire que les résultats qu'ils ont déjà obtenus seront suivis d'un grand nombre d'autres non moins intéressans.«

JACOBI hebt in jenem Briefe besonders die Lösung des Divisionsproblems hervor, durch welche ABEL die Theilung einer beliebigen elliptischen Function auf die Theilung der ganzen Function K zurückführt, bemerkt jedoch dass sich die algebraische Auflösung der Divisionsgleichung

*Ich gehe auf das erste Supplement des *traité* in diesen Blättern nicht näher ein, da es im Wesentlichen nur eine Reproduction der von JACOBI veröffentlichten Arbeiten enthält, bisweilen mit Abänderungen in einzelnen Beweismethoden, die auch von JACOBI später, so z. B. in Nr. 22 der *fundamenta*, benutzt worden, im Uebrigen nur mit Zusätzen, welche sich auf die Umgestaltung der Formeln zum Zwecke bequemerer numerischer Berechnung beziehen.

einfacher als es bei ABEL geschehen, so darstellen lässt, dass man, um hier die ABEL'schen Zeichen zu gebrauchen, die Beziehung entwickelt

$$\sum_{m=-n}^{+n} \sum_{\mu=-n}^{+n} \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right) p^m q^\mu = \sqrt[2n+1]{A + Bf(2n+1)\beta F(2n+1)\beta},$$

in welcher p und q $2n+1^{\text{te}}$ Einheitswurzeln, A und B ganze Functionen von $\varphi(2n+1)\beta$ sind, und durch Variation der Grössen p und q die Posten der linken Seite durch die rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen ausdrückt – ein Resultat, das JACOBI grade in dieser Form in einer aus Königsberg vom 25. Januar 1828 an CRELLE gerichteten Zuschrift im 1. Hefte des 3. Bandes von dessen Journal veröffentlicht, und auf dessen Beweis auch ABEL in einer vom 27. August 1828 aus Christiania datirten und im 2. Hefte des 4. Bandes des CRELLE'schen Journals veröffentlichten Arbeit, *Théorèmes sur les fonctions elliptiques*, näher eingeht, indem er den allgemeinen zwischen elliptischen Functionen mit getheilten Perioden gültigen Satz zu Grunde legt:

> »Soit $\psi(\vartheta)$ une fonction entière quelconque de la quantité $\varphi(\vartheta + m\alpha + \mu\beta)$ qui reste la même en changeant ϑ en $\vartheta + \alpha$ et en $\vartheta + \beta\left(\alpha = \frac{2\omega}{2n+1}, \beta = \frac{2\varpi i}{2n+1}\right)$. Soit ν le plus grand exposant de la quantité $\varphi(\vartheta)$ dans la fonction $\psi(\vartheta)$, on aura toujours $\psi(\vartheta) = p + qf(2n+1)\vartheta.\ F(2n+1)\vartheta$, où p et q sont deux fonctions **entières** de $\varphi(2n+1)\vartheta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$«,

und ähnliche Sätze allgemeiner Natur.

JACOBI kommt auf die algebraische Auflösbarkeit der Divisionsgleichungen und zugleich auf die der Transformationsgleichungen in einem aus Königsberg vom 18. Januar 1829 datirten und an LEGENDRE gerichteten, sehr interessanten Schreiben in den folgenden Zeilen wieder zurück:

> »Après que vous aviez résolu le premier l'équation du neuvième degré, de laquelle dépend la trisection des Fonctions Elliptiques, nous remarquâmes en même temps, Mr. ABEL et moi, que l'on peut généralement réduire l'équation algébrique du degré n^2, de laquelle dépend la $n^{\text{ième}}$ section, à deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Ce résultat était une conséquence de la remarque que j'avais faite que l'on peut parvenir à la multiplication en appliquant à la Fonction Elliptique deux transformations l'une après l'autre. En lisant avec attention le premier

Mémoire de M. Abel sur les Fonctions Elliptiques, on reconnaît aisément qu'il a effectivement suivi la même route sans cependant soupçonner, lors du temps qu'il composa son Mémoire, que c'était le **medium** des transformations par lequel il passa. Soit $z = \sin\mathrm{am}\, nu$, $x = \sin\mathrm{am}\, u$, n étant un nombre impaire quelconque, si l'on a

$$(1) \quad z = \frac{b'y + b'''y^3 + \cdots + b^{(n)}y^n}{b + b''y^2 + \cdots + b^{(n-1)}y^{n-1}},$$

$$(2) \quad y = \frac{a'x + a'''x^3 + \cdots + a^{(n)}x^n}{a + a''x^2 + \cdots + a^{(n-1)}x^{n-1}},$$

y étant le **sinus amplitude** de la fonction transformée, il faut, d'après ce que je viens de dire, pour avoir x en z, exprimer en premier lieu x en y, en résolvant algébriquement l'équation (2) ; puis, en résolvant encore l'équation (1), il faut exprimer par z toutes les fonctions de y qui se trouveront sous les radicaux. Or comme on a toujours plusieurs transformations qui répondent à un même nombre n, on trouvera de cette manière différentes formules algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section d'après les différentes transformations par lesquelles on est passé à la multiplication. On pouvait cependant soupçonner qu'il y avait une manière d'exprimer x en z plus simple et qui n'était qu'unique. J'ai fait connaître cette forme la plus simple sous laquelle on peut présenter les expressions algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section dans une petite *Addition* faite au premier *Mémoire de M. Abel sur les Fonctions Elliptiques*, et laquelle se trouve dans le 3e vol. du Journal de M. CRELLE. Elle est fondée sur une formule très-remarquable, et don't je veux vous parier en peu de mots«,

worauf die Mittheilung derjenigen Methode folgt, die datirt aus Königsberg den 11. Januar 1829 von JACOBI im 2. Hefte des 4. Bandes des Journals für Mathematik in der: *Suite des notices sur les fonctions elliptiques* veröffentlicht wurde, und vermittels welcher $\sin\mathrm{am}(u, \varkappa)$ durch $\sin\mathrm{am}(\frac{u}{M}, \lambda)$, und $\sin\mathrm{am}(\frac{u}{M}, \lambda)$ durch $\sin\mathrm{am}(nu, \varkappa)$ ausgedrückt wird; aus der algebraischen Auflösbarkeit der Transformationsgleichung leitet JACOBI die Divisionsformeln in der oben erwähnten Gestalt ab, die in einfachster Form das Theorem aussprechen, für welches LEGENDRE in seiner Antwort an JACOBI vom 9. Februar 1829 in den Worten:

> »Je n'aurais jamais imaginé qu'il fût possible de résoudre ainsi explicitement une équation du degré nn, et de former d'une manière practicable les différents termes de la formule«

seine Bewunderung ausspricht; und grade auf diese letzteren Resultate legte auch JACOBI einen sehr grossen Werth:

> »Mais le but principal de ce premier *Mémoire*, sagt er in einem nach Beendigung des Druckes der *fundamenta* am 23. Mai 1829 an LEGENDRE gerichteten Briefe, est de préparer tout ce qui est nécessaire, pour que je puisse établir dans les *Mémoires* suivants, avec toute la rigueur nécessaire et en partant des premiers éléments, cette théorie des Transformations irrationelles ou inverses et de la section des Fonctions Elliptiques, qui me paraît être le comble de toutes mes recherches sur cette matière«.

Nach dieser kurzen Abschweifung, welche die weitere Entwickelung des Divisionsproblems zum Gegenstande hatte, kehre ich wieder zu jenem interessanten Briefe JACOBI's vom 12. Januar 1828 zurück, welcher zum Theil der Darstellung der ABEL'schen Entdeckungen gewidmet war, in welchem wir aber auch eigne, für den weiteren Ausbau der Theorie der elliptischen Functionen überaus wichtige Resultate finden. JACOBI spricht in demselben bereits von den allgemeinen algebraischen Modulargleichungen zwischen den vierten Wurzeln der Integralmoduln, jenen Gleichungen, die eine Brücke bildeten zwischen der Theorie der elliptischen Transcendenten einerseits, der Algebra und Zahlentheorie andererseits, hebt dort schon den Satz hervor, dass die zu einem beliebigen Transformationsgrade gehörigen Modulargleichungen ein und derselben Differentialgleichung dritter Ordnung genügen »un résultat curieux qui d'abord m'a frappé un peu« und fügt endlich noch die Bemerkung hinzu:

> »Aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module ... Ce sera dans tous les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, $\varkappa$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la Fonction Elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$ ... C'est un genre de multiplication qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle« ;

wie JACOBI zu diesen letzteren Sätzen gelangt, wie er dieselben unmittelbar aus den Principien von ABEL hergeleitet, werden wir gleich nachher bei einer noch zu besprechenden Arbeit desselben darlegen.

Während nun JACOBI die Natur der doppelperiodischen Functionen tiefer zu ergründen und, wie wir nachher sehen werden, durch Einführung der Fundamentalfunction der elliptischen Transcendenten, der späteren ϑ-Function, der ganzen Theorie eine neue Basis zu schaffen bemüht ist, vollendet ABEL am 12. Februar 1828 den zweiten Theil seiner *recherches*, der sogleich im 2. Hefte des dritten Bandes des CRELLE'schen Journals veröffentlicht wurde. Es handelt sich vor Allem um die algebraische Ausdrückbarkeit der Function $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ für gewisse Beziehungen von e zu c:

> »C'est ce qui arrive toujours, si $\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{n}\right)$ peut être exprimé rationellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous ces cas l'équation $P_n = 0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'exposerai cette méthode dans un mémoire séparé, et je me contenterai pour le moment à considérer le cas le plus simple, et qui résulte de la supposition $e = c = 1$ et $n = 4\nu + 1$«.

Nachdem für diesen Fall die algebraische Auflösbarkeit der Gleichung für die durch $4\nu + 1$ und 2^ν getheilten Perioden gezeigt ist, wird der schöne Satz ausgesprochen:

> »La valeur de la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être exprimée par **des racines carrées** toutes les fois que n est un nombre de la forme 2^n ou $1 + 2^n$, le dernier nombre étant premier, ou même un produit de plusieurs nombres de ces deux formes«,

und daraus geschlossen:

> »Donc dans ce cas on peut construire les points de division à l'aide de la règle et du compas seulement, ou ce qui revient an même, par l'intersection de lignes droites et de cercles«.

Ohne noch Kenntniss von den in SCHUMACHER's *astr. Nachrichten* veröffentlichten Arbeiten JACOBI's über die Transformation zu haben, wie ABEL am Schlusse des *Memoirs* ausdrücklich hervorhebt, und was auch JACOBI in einem an LEGENDRE gerichteten Briefe vom 9. September 1828 in den Worten:

»Vous y aurez vu que M. ABEL a trouvé de son coté la théorie générale de la Transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le second *Mémoire*, inséré dans le Recueil de M. SCHUMACHER, No. 138, contient une **déduction** rigoureuse des théorèmes de transformation, dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux«

nochmals anzuerkennen sich veranlasst sieht, geht ABEL zur Bearbeitung der allgemeinen rationalen Transformation der elliptischen Integrale über:

»M. LEGENDRE a fait voir dans ses *exercices de calc. int.*, comment l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}}$, qui, en faisant $\sin\varphi = x$, se change en $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$, peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant : Si l'on désigne par α la quantité $\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, où au moins l'un des deux nombres entiers m et μ est premier avec $2n+1$, on aura

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

où $$y = f \cdot x \frac{(\varphi^2\alpha - x^2)\cdots(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha x^2)}, \ldots$$«;

er liefert die Ausdrücke für den transformirten Integralmodul in den verschiedensten Formen und bestimmt die Anzahl der jedem Grade entsprechenden Transformationen.

Zugleich lässt er aber auch die umfassende Bedeutung der rationalen Transformation für das Problem der allgemeinsten Beziehungen zwischen elliptischen Integralen in den folgenden Worten erkennen:

»Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudrait connaître toutes les transformations possibles; or je suis parvenu à démontrer, qu'on les obtient toutes en combinant celle de M. LEGENDRE avec celles,

> contenues dans la formule ci-dessus, **même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques**. Ce théorème dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions,«

und weist so auf eine Reihe von Untersuchungen hin, die er erst in einer späteren Arbeit näher ausführt, und welche weit über die in dieser Richtung von JACOBI angestellten Untersuchungen hinausgehen. Aber auch nach einer anderen Richtung hin erweiterte er die Theorie der Transformation oder besser der Multiplication; in dem Abschnitte: *Sur l'intégration de l'équation séparée* $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu^2y^2)}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu^2x^2)}}$ spricht er das Theorem aus:

> »En supposant a réel, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit un nombre rationel ; en supposant a **imaginaire**, et l'équation intégrable **algébriquement**, il faut nécessairement que a soit de la forme $m \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{n}$, où m et n sont des nombres rationnels. Dans ce cas la quantité μ n'est pas arbitraire ; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de μ satisfait à la question«,

und fügt hinzu:

> »La démonstration de ces théorèmes fait partie d'une théorie très étendue des fonctions elliptiques, dont je m'occupe actuellement, et qui paraîtra aussitôt qu'il me sera possible«.

Der schon im nächsten Jahre erfolgte Tod ABEL's vereitelte die Absicht, eine zusammenhängende Theorie der elliptischen Transcendenten zu veröffentlichen.

JACOBI hatte inzwischen von den Multiplicationsformeln ausgehend, wie er sie mit Hülfe der von ihm eingeführten Umkehrungsfunction gestaltet hatte, eine von LEGENDRE als »fort ingenieux« bezeichnete Anwendung auf das Problem gemacht, die Relation zwischen der Distanz der Mittelpunkte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmässigen Polygone eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist, und unter dem Titel: *Ueber die Anwendung der*

elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie mit dem Datum vom 1. April 1828 im 4. Hefte des dritten Bandes d. J. f. M. veröffentlicht. Eine weitere, für die Theorie der elliptischen Transcendenten überaus wichtige, aus einem Briefe vom 2. April 1828 an CRELLE entnommene Arbeit erschien unter dem Titel: *Note sur les fonctions elliptiques* im zweiten Hefte des dritten Bandes desselben Journals, und ist ohne Kenntniss des zweiten Theiles der ABEL'schen, in demselben Hefte veröffentlichten *recherches* geschrieben. An die Darstellung der Sinusampl. als Quotienten zweier FOURIER'schen Reihen, der Θ und H, oder der späteren ϑ_0- und ϑ_1-Function, reiht sich die Entwicklung von $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ nach den Potenzen von $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, deren Exponenten die Quadrate der natürlichen Zahlen sind, und von der JACOBI in dem am 9. September 1828 an LEGENDRE gerichteten Briefe sagt:

> »... me paraît être l'un des résultats les plus brillants de toute la théorie.

Das Verdienst der Auffindung dieser merkwürdigen Beziehung zwischen der Periode und der ϑ-Function sowie einer Reihe anderer hierher gehöriger Relationen gebührt JACOBI allein; ABEL, der dieselben zum Theil in der »*Note sur quelques formules elliptiques*«, welche 1828 an CRELLE geschickt, und 1829 im ersten Hefte des vierten Bandes veröffentlicht wurde, ebenfalls ableitet, sagt:

> »formule dûe à M. JACOBI (Tome III.pag. 193, où ce géomètre en présente plusieurs autres très remarquables et très élégantes)«.

Es folgt weiter in jener Arbeit JACOBI's die für die algebraischen Untersuchungen der neueren Zeit so wichtig gewordene Entwicklung für $\sqrt{\varkappa}$ als Quotient von zwei nach quadratischen Exponenten von q und $q^{\frac{1}{4}}$ fortschreitenden Reihen, von denen JACOBI in dem oben erwähnten Briefe an LEGENDRE vom 9. September 1828 sagt:

> »Toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'Analyse«.

LEGENDRE begrüsst diese schönen Entdeckungen JACOBI's in einem am 15. October 1828 an denselben gerichteten Briefe mit den Worten:

»Du reste je les (les belles séries en fonctions de q, que vous êtes parvenu à sommer) regarde comme un nouveau titre que vous avez acquis à l'estime des savants et il en est de même de vos nouvelles fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$« ...,

und glaubt die Bedeutung dieser Entdeckung am besten durch die Worte zu charakterisiren:

»L'envahisseur M. G.... ne s'avisera point, je pense, d'écrire qu'il avait trouvé tout cela longtemps avant vous, car s'il disait pareille chose, il se ferait moquer de lui« ;

und doch war GAUSS auch im Besitze aller dieser Resultate schon seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts.

Weiter findet sich in jener fundamentalen Arbeit JACOBI's das auch von ABEL nur in etwas anderer Form im zweiten Theil der *recherches* veröffentlichte Resultat, dass einem gegebenen Modul für einen Primzahlgrad der Transformation immer $n + 1$ andere transformirte Moduln entsprechen, die man erhält, wenn statt q

$$q^n, q^{\frac{1}{n}}, \alpha q^{\frac{1}{n}}, \cdots \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$$

gesetzt wird, und $\alpha^n = 1$ ist, zu welchem Satze JACOBI in dem am 9. September 1828 an LEGENDRE gerichteten Briefe die Bemerkung hinzufügt:

»M. ABEL verra donc que les transformations imaginaires ne m'étaient pas échappées«.

JACOBI wendet sich sodann der Theorie der Modulargleichungen zu, stellt die schon in dem Briefe an LEGENDRE erwähnte Differentialgleichung dritter Ordnung auf und hebt die Fundamentaleigenschaften der Modulargleichungen für die Anwendung zweier linearer Transformationen auf den ursprünglichen und transformirten Modul hervor.

Endlich geht derselbe in jener Arbeit auf das von ABEL in seinen »*Aufgaben und Lehrsätze*« (CRELLE's J. B. II) ausgesprochene Theorem näher ein und schliesst mit den Worten:

»Tout cela découle immédiatement des principes établis par Mr. Abel«.

Unmittelbar darauf theilt JACOBI von Königsberg aus am 12. April 1828, auch noch ohne Kenntniss des zweiten Theiles der *recherches*, LEGENDRE die in der eben besprochenen Arbeit ausgeführten Entwicklungsformen der sin am, des Integralmoduls und der Periode K mit, und weist darauf hin, dass der Zähler und Nenner seiner sin am den mathematischen Physikern Frankreichs bereits bekannte Functionen sind:

»Quant à l'importance de ces formales, vous la sentirez mieux que je ne pourrais le dire. Aussi elles ne seront pas sans intérêt pour les célèbres géomètres qui s'occupent du mouvement de la chaleur ; les numérateurs et les dénominateurs des fractions par lesquelles on a exprimé les fonctions trigonométriques de l'amplitude étant souvent rencontrés dans la dite question«.

Dieser durch Inhalt und Form interessante Brief JACOBI's kreuzte sich mit einem Briefe von LEGENDRE vom 14. April 1828, in welchem derselbe erwähnt, dass er von SCHUMACHER und dieser von Bessel die Mittheilung erhalten habe, JACOBI sei mit der Abfassung eines grossen Memoires über die Theorie der elliptischen Functionen beschäftigt, und hinzufügt:

»mais je vous engage de ne pas trop tarder à publier les parties essentielles de ce travail«.

Noch im zweiten Hefte des dritten Bandes d. J. f. M. finden wir eine vom 24. April 1828 datirte Arbeit JACOBI's, *Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre quarrés*, welche eine zahlentheoretische Anwendung der eben gefundenen Reihenentwicklungen nach Potenzen der Grösse q enthält.

Wir befinden uns jetzt schon mitten in der Zeit des wunderbaren Wettkampfes der beiden grossen Mathematiker, wir sehen das gegenseitige Ineinandereingreifen, das sich Stützen des Einen auf die Resultate und Methoden des Andern;

»je puis me reposer sur le zèle de deux athlètes infatigables tels que vous et M. ABEL,«

sagt LEGENDRE in einem an JACOBI gerichteten Briefe vom 15. October 1828,

und später in einem Briefe vom 8. April 1829:

»Je me félicite néanmoins d'avoir vécu assez longtemps pour être témoin de ces luttes généreuses entre deux jeunes athlètes également vigoureux, qui font tourner leurs efforts au profit de la science dont ils reculent de plus en plus les limites«.

ABEL sucht das Transformationsproblem, in dessen Veröffentlichung ihm JACOBI zuvorgekommen, zu verallgemeinern, indem er die Frage nach allen möglichen algebraischen Transformationen eines elliptischen Integrales in ein anderes aufwirft:

»mais on peut envisager cette théorie, sagt ABEL in seinem aus Christiania vom 27. Mai 1828 datirten, in Nr. 138 der astr. Nachr. im Juni 1828 erschienenen Aufsatze, sous un point de vue beaucoup plus général, en se proposant comme un problème d'analyse indéterminée de trouver toutes les transformations possibles d'une fonction elliptique, qui peuvent s'effectuer d'une certaine manière. Je suis parvenu à résoudre complètement un grand nombre de problèmes de cette espèce. Parmi eux est le suivant, qui est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques : »Trouver tous les cas possibles dans les quels on pourra satisfaire à l'équation différentielle (1) $\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)(1-e_1{}^2y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$, en mettant pour y une fonction algébrique de x, rationelle ou irrationelle«. Ce problème vu la généralité de la fonction y parait au premier coup d'oeil bien difficil, mais on peut le ramener au cas où l'on suppose y rationelle. En effet on peut démontrer que si l'équation (1) a lieu pour une valeur irrationelle de y, on en pourra toujours déduire une autre de la même forme, dans laquelle y est rationelle en changeant convenablement le coëfficient a, les quantités c_1, e_1, c, e restant les mêmes. La méthode qui s'offre d'abord pour résoudre le problème dans le cas où y est rationelle est celle des coëfficiens indéterminés ; or on seroit bientôt fatigué à cause de l'extrême complication des équations à satisfaire. Je crois donc que le procédé suivant, qui conduit de la manière la plus simple à une solution complète, doit peut-être mériter l'attention des géomètres«.

Der Satz von der Zurückführbarkeit des allgemeinen Transformationsproblems auf das rationale ist jedoch in dieser Arbeit ohne Beweis ausgesprochen, das rationale Transformationsproblem selbst dagegen auf

Grund von Periodenbetrachtungen für die ursprüngliche und transformirte elliptische Function in strenger Weise behandelt, die Zerlegbarkeit desselben in einfachere analoge Probleme nachgewiesen für den Fall, dass die charakteristische Transformationszahl eine zusammengesetzte ist, und die Transformationsgleichung selbst als eine algebraisch auflösbare bezeichnet. Endlich geht ABEL noch auf den sehr wichtigen Fall der Gleichheit der transformirten Integralmoduln näher ein, der schon von Anfang an in allen seinen Untersuchungen wiederkehrt und sich später zur Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen ausgebildet hat; der Multiplicator a der Transformation wird in der nothwendigen Form $\mu' + \sqrt{-\mu}$ gefunden, worin μ' und μ zwei rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere wesentlich **positiv** sein muss, und hinzugefügt:

> »Si l'on attribue à a une telle valeur, on pourra trouver une infinité de valeurs différentes pour e et c, qui rendent le problème possible. Toutes ces valeurs sont exprimables par des **radicaux**.«

Die Verallgemeinerung des rationalen Transformationsproblems auf das algebraische hält JACOBI für das wesentlichste Verdienst ABEL's um die Transformationstheorie;

> »Je remarque, à cette occasion, sagt er in seinem Briefe vom 14. Juni 1829 an LEGENDRE, que le mérite principal d'ABEL, dans la théorie de la Transformation, consiste dans sa démonstration que **nos formules embrassent toutes les substitutions algébriques possibles**, ce qui donne un haut degré de perfection à cette théorie«.

Nach einer Reihe kleinerer Notizen, welche die Transformationstheorie betreffen, und in welchen beide Mathematiker zum Theil dieselben Sätze finden, sich aber abwechselnd in der Veröffentlichung derselben zuvorkommen, wendet sich JACOBI der weiteren Ausführung der Theorie der elliptischen Functionen zu, wie sie, da ABEL schon nach einem Jahre starb, dem Inhalte und der Form nach für die Zukunft massgebend geworden und bis auf unwesentliche Aenderungen selbst in ihren Bezeichnungen noch heute fortbesteht. In der »*Suite des notices sur les fonctions elliptiques*« (Auszug aus einem Briefe an CRELLE vom 21. Juli 1828), welche in dem dritten Hefte des dritten Bandes des CRELLE'schen Journals veröffentlicht ist, führt Jacobi die Θ- und H-Functionen als selbständige Fundamentalfunctionen, welche erst den elliptischen Functionen ihre Entstehung geben, in die Theorie der elliptischen Transcendenten ein, ein Gedanke, auf

den auch wiederum ABEL gleichzeitig geführt worden, und dem er in einem am 25. November 1828 an LEGENDRE gerichteten Schreiben in den Worten Ausdruck gegeben:

> »La théorie des fonctions elliptiques m'a conduit à considérer deux nouvelles fonctions qui jouissent de plusieurs propriétés remarquables«.

Abel wollte genau dem von JACOBI in jener Arbeit entwickelten Principe analog die Eigenschaften dieser neuen Transcendenten gesondert von der Umkehrungsfunction des elliptischen Integrals behandeln, muss jedoch letzterem unstreitig die Priorität der Veröffentlichung dieser Entdeckung überlassen, da die Ausarbeitung des zweiten Theiles des später noch zu besprechenden *»précis d'une théorie des fonctions elliptiques«*, welcher alle diese Untersuchungen enthalten sollte, durch den plötzlichen Tod ABEL's unterblieb.

Es folgen in der oben erwähnten Arbeit JACOBI's die schönen und fruchtbaren Sätze, nach welchen die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung sich durch ϑ-Functionen ausdrücken lassen, in deren Argument das Integral erster Gattung linear eintritt, und die in der Theorie der allgemeinen ABEL'schen Integrale ihr Analogon gefunden haben. In Betreff der Reductionsformel des Integrales dritter Gattung mit Hülfe der ϑ-Functionen hebt JACOBI in einem vom 9. September 1828 datirten Briefe an LEGENDRE eine charakteristische Eigenschaft besonders hervor:

> »d'ailleurs elle montre que les Fonctions Elliptiques de troisième espèce dans lesquelles entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux, découverte qui vous intéressera beaucoup,«

und grade diese Entdeckung JACOBI's greift auch LEGENDRE mit grossem Interesse auf; doch die Unterscheidung des reellen und imaginären Parameters bereitet ihm Schwierigkeiten und er schreibt am 16. Januar 1829 an ABEL, dass durch Einführung eines imaginären Parameters dennoch wieder drei unabhängige Grössen in das Integral dritter Gattung eintreten,

> »il y aurait donc par le fait quatre espèces de fonctions elliptiques au lieu de trois, et la quatrième serait bien plus composée que la troisième. C'est un point qui mérite d'être examiné et mis au clair. Je le recommande à votre investigation et à celle de M. JACOBI«.

JACOBI wiederholt die oben erwähnte Behauptung in der vom 11. Januar 1829 datirten und im 2. Hefte des 4. Bandes von CRELLE's Journal veröffentlichten Arbeit »*Suite des notices sur les fonctions elliptiques*« bei Aufstellung der Beziehung

$$\Pi(u,a) = uZ(a) + \log\sqrt{\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}},$$

> »cette dernière formule fait voir que les fonctions elliptiques de la troisième espèce, lesquelles dépendent de trois éléments, peuvent être réduites à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux«,

und LEGENDRE ersah auch daraus die Möglichkeit, Tafeln mit doppeltem Eingange für die Integrale dritter Gattung à paramètre logarithmique zu construiren, wogegen ihm dies für die Integrale à paramètre circulaire nicht glückte,

> »quoique vous en ayez annoncé la possibilité, schreibt LEGENDRE am 8. April 1829 an JACOBI ; je serais trèsaise de m'être trompé, et je réparerais avec grand plaisir mon erreur si vous m'indiquiez le moyen de résoudre la difficulté et d'exprimer par deux variables seulement, cette seconde division des fonctions de troisième espèce. Ce serait à mon avis la plus grande découverte qu'il est possible d'espérer dans la théorie des fonctions elliptiques, puisqu'elle rendrait l'usage de ces fonctions presqu'aussi facile, dans tous les cas, que celui des fonctions circulaires et logarithmiques«.

JACOBI bezeichnet in dem am 23. Mai 1829 an LEGENDRE gerichteten Schreiben die von LEGENDRE getroffene Unterscheidung der Integrale dritter Gattung als eine nicht in der analytischen Natur dieser Functionen begründete:

> »En ce qui regarde les Intégrales Elliptiques de la troisième espèce à paramètre circulaire, vous avez complètement raison ; elles ne jouissent pas d'une réduction analogue à celle de l'autre espèce logarithmique. Si j'ai annoncé une pareille chose, comme vous le dites dans votre lettre, cela n'a pu être que dans le sens général et analytique, où l'on ne distingue pas entre les valeurs réelles et imaginaires, et qu'on fait abstraction de

> l'évaluation numérique. Sous ce point de vue, une même formule embrasse tous les cas, de sorte qu'on n'a pas besoin de distinguer entre les espèces, ce qui devient nécessaire aussitôt qu'on veut appliquer les formules qui s'y rapportent au calcul numérique ou qu'on ne veut considérer que des quantités réelles. Toutefois cette sorte d'inconvénient, qui tient à la nature intime de l'objet, et nullement à un défaut de notre part, me paraît ajouter de mérite à votre division des Intégrales Elliptiques de la troisième espèce en deux classes, auxquelles se ramènent tous les autres cas« ;

aber LEGENDRE bedauert, dass dies in der Natur der Sache liege und grade dem, was er sich als Ziel seiner Untersuchungen gesetzt, hinderlich in den Weg trete:

> »mais, comme vous dites, cela tient à la nature des choses et nous ne pouvons rien y changer, sagt er in einem Briefe vom 4. Juni 1829 an JACOBI. Vous vous en consolez plus aisément que moi, vous et M. ABEL, qui êtes tous deux éminemment spéculatifs, mais moi qui ai toujours eu pour but d'introduire dans le calcul de nouveaux éléments . . . . . .«,

worauf JACOBI am 14. Juni 1829 erwidert:

> »Quant au calcul numérique des Intégrales Elliptiques de troisième espèce à paramètre circulaire, je vous demande pardon d'avoir fait naître en vous une espérance, qui n'a pas été réalisée depuis. Cependant je crois que vous n'avez pas à regretter trop l'inconvénient, que ces fonctions ne peuvent être réduites en tables à double entrée«.

Wir haben noch immer nicht den reichen Inhalt der oben erwähnten Arbeit JACOBI's erschöpft; es wird ferner auf die Transformation der ϑ-Functionen hingewiesen und gezeigt, wie man daraus die Transformationsformeln der elliptischen Functionen unmittelbar herleiten kann, was von JACOBI in der vom 11. Januar 1829 datirten Arbeit im zweiten Hefte des vierten Bandes d. J. f. M. auf die Aufstellung der Transformationsformeln für die Integrale zweiter und dritter Gattung ausgedehnt wird,

> »On peut aussi parvenir directement de la fonction $\Theta(u)$ aux formules de transformation en partant de son développement

en produit infini, comme nous l'avons montré dans le troisième volume de ce journal. De là, en suivant une marche inverse de celle qu'on vient de présenter, on tire sur le champ les formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première et de la troisième espèce et en différentiant, celles de transformation des fonctions elliptiques de la seconde espèce«.

Die hierauf bezüglichen Untersuchungen wollte JACOBI im Zusammenhange veröffentlichen; nachdem er mit Bezug auf seine früheren Arbeiten am 9. September 1828 an LEGENDRE geschrieben:

»Mes recherches seront rassemblées dans un petit Ouvrage d'environ 200 pages in 4° qui sera imprimé à part et dont l'impression vient d'être commencée. Il aura pour titre : *Fundamenta nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, ... Cependant la fin de mon *Ouvrage* ne doit pas être celle de mes recherches . . . . . .«

erklärt er in der Abhandlung, die wir eben besprechen:

»Les résultats dont je viens de donner ici une exposition rapide, font partie de ceux qu'on trouvera dans la seconde partie de mon ouvrage sur les fonctions elliptiques. La première partie de cet ouvrage paroitra incessament.«

Aber wiewohl LEGENDRE in einem Briefe vom 9. Februar 1829 JACOBI zur Herausgabe einer zusammenhängenden Darstellung aller seiner Arbeiten in der Theorie der elliptischen Transcendenten mit den Worten ermunterte:

»il (ABEL) obtient ainsi sur vous une sorte d'avantage, parce que vous n'avez guère publié jusqu'à présent que des notices qui ne font pas connaître vos méthodes. C'est une raison pour que vous vous hâtiez de prendre possession de ce qui vous appartient en faisant paraître votre ouvrage le plus tôt qu'il vous sera possible«,

hatte sich dennoch JACOBI schon unmittelbar darauf, als der Druck des ersten Theiles der *fundamenta* eben beendigt war, entschlossen, einen zweiten Theil dieses Werkes, fürs erste wenigstens, nicht folgen zu lassen, und schreibt am 23. Mai 1829 an LEGENDRE:

»L'impression de celui-ci étant achevée, je me suis empressé de vous le faire parvenir et je vous prie de l'accueillir avec cette bonté, dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes. Cependant je crains, qu'il ne soit beaucoup au-dessous de la bonne opinion que vous avez voulu concevoir de mes travaux, et je crains cela d'autant plus, puisqu'il ne contient que les fondements de mes recherches et qu'il me faut encore une longue série de travaux pour établir aux yeux de Géomètres leur ensemble«.

Jene kurze, aber überaus inhaltreiche Arbeit JACOBI's im 3. Hefte des 3. Bandes von CRELLE's Journal entwickelt weiter die partielle Differentialgleichung der ϑ-Functionen als Function des Argumentes und des ϑ-Moduls und daraus die Potenzreihen für diese Transcendenten; die Herstellung des eleganten Ausdruckes für den Multiplicator der Transformation

$$M^2 = \frac{n(\varkappa - \varkappa^3)}{(\lambda - \lambda^3)} \frac{d\lambda}{d\varkappa}$$

führt auf die Definition der Multiplicatorgleichungen und auf jene merkwürdige Eigenschaft der Lösungen derselben, wonach man für einen primzahligen Transformationsgrad die Hälfte der Werthe von $\sqrt{M}$ linear mit Hülfe der andern Hälfte ausdrücken kann,

»cela donne le théorème énoncé, un des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques« ;

und in der That zeigen die algebraischen Arbeiten der neueren Zeit die ganze Tragweite und Bedeutung jenes Satzes, die JACOBI sogleich erkannt und die derselbe in dem am 14. März 1829 an LEGENDRE gerichteten Briefe, demselben in den Worten anzudeuten suchte:

»Aussi j'ai découvert une propriété tout à fait singulière de ces équations, dont les racines sont les régulateurs, comme vous l'aurez lu dans le 3e cahier du vol. III : c'est qu'on peut exprimer linéairement leurs **racines carrées** au moyen de la moitié de leur nombre, propriété qui m'est d'autant plus remarquable que je ne l'ai trouvée que par les développements en séries qui me sont propres et que je ne vois pas comment on peut la prouver en quantités finies, ce qui pourtant doit être possible. Cette propriété servira sans doute à approfondir un jour la vraie nature de ces équations du degré $n+1$«.

Von nun an trennen sich die Richtungen der beiden grossen Mathematiker immer mehr, vielleicht begründet durch die Natur ihrer Anlagen und die verschiedenartigen Ausgangspunkte ihrer Arbeiten, vielleicht aber auch veranlasst durch das Streben, ihre Untersuchungen nicht gegenseitig zu kreuzen; wir finden in Bezug hierauf in dem Schreiben JACOBI's an LEGENDRE vom 14. März 1829 die interessanten Worte:

> »Je ne veux ni reproduire ni prévenir les travaux de M. ABEL : presque tout ce que j'ai publié dans ces derniers temps sur les Fonctions Elliptiques contient des vues nouvelles ; ce ne sont pas des amplifications de matières dont M. ABEL a traité ou même promis de s'en occuper«.

Während sich ABEL mehr der Untersuchung der Integrale und der Frage der Reduction der allgemeinen ABEL'schen Integrale auf niedere Transcendenten zuwendet, sucht JACOBI tiefer die Eigenschaften der elliptischen Functionen zu ergründen und wird dadurch zu Untersuchungen von sehr allgemeiner und rein functionentheoretischer Natur geführt;

> »les fonctions elliptiques, sagt er in der vorher besprochenen Arbeit, diffèrent essentiellement des transcendantes ordinaires. Elles ont une manière d'être pour ainsi dire absolue. Leur caractère principal est d'embrasser tout ce qu'il y a de périodique dans l'analyse. En effet les fonctions trigonométriques ayant une période réelle, les exponentielles une période imaginaire, les fonctions elliptiques embrassent les deux cas. . . . D'ailleurs on démontre aisément, qu'une fonction analytique ne saura avoir plus que deux périodes, l'une réelle et l'autre imaginaire ou l'une et l'autre imaginaires«,

Sätze, die erst in einer späteren Zeit von JACOBI veröffentlicht und von demselben zur Grundlage einer Theorie der hyperelliptischen Functionen gemacht wurden.

Während nun ABEL und JACOBI diesen weitgehenden Untersuchungen ihre Hauptthätigkeit zuwenden, veröffentlichen sie noch kleinere, auf die früher behandelten Gegenstände bezügliche Arbeiten. ABEL kommt auf die Ausführung der allgemeinen algebraischen Transformation zurück, die er schon früher als den eigentlichen Ausgangspunkt für die Transformationstheorie bezeichnet hatte, und zwar jetzt für reelle Integralmoduln, stellt sich in einer vom 25. September 1828 datirten, in Nr. 147 der astr. Nachr. im November 1828 veröffentlichten Arbeit die Aufgabe:

»Trouver tous les cas possibles où l'on pourra satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1{}^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

par une **équation algébrique** entre les variables x et y, en supposant les modules c et c_1 moindres que l'unité et le coëfficient a réel ou imaginair«.

Die Lösung dieser Aufgabe wird mit Hülfe der Periodenbeziehungen geleistet, die zwischen zwei in einer algebraischen Beziehung stehenden elliptischen Functionen mit verschiedenen Moduln stattfinden müssen, daraus werden für den Multiplicator nothwendige Formen und Ausdrücke durch die Periodenquotienten hergeleitet und endlich die für reelle Integralmoduln gültige complexe Multiplication behandelt.

Ferner bespricht ABEL noch kurz in einer im 4. Hefte des 3. Bandes des CRELLE'schen Journals veröffentlichten Arbeit: »*Sur le nombre des transformations différentes, qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donnée de premier degré*« die Anzahl der verschiedenen Transformationen sowie die sechs Hauptfälle der linearen Transformation und verweist auf eben diese Darlegung in einem aus Christiania am 25. November 1828 an LEGENDRE gerichteten Briefe, welcher die Beantwortung der von letzterem an ihn gerichteten Frage zum Gegenstande hat, wie es möglich sei, dass ABEL $6(n+1)$ Transformationen finde, während die Modulargleichung nur vom $n+1^{\text{ten}}$ Grade sei. Ausser der linearen Transformation behandelt jene Note noch das bereits von JACOBI bewiesene Theorem, nach welchem man nur q^n, $q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha q^{\frac{1}{n}}$, $\cdots \alpha^{n-1}q^{\frac{1}{n}}$ statt q in den Ausdruck für $\varkappa$ zu setzen braucht, um alle transformirten Moduln zu erhalten, wenn man von den linearen Transformationen absieht.

Endlich veröffentlichte ABEL noch gleichzeitig mit dieser Note ein Memoire: »*Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce*«, worin er die von JACOBI schon früher in anderem Sinne behandelte Aufgabe von der Transformation der Integrale zweiter und dritter Gattung wieder aufnimmt und das Theorem ausspricht:

»Si une intégrale algébrique $f(y,x) = 0$ satisfait à l'équation

$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$, on aura toujours :

$$\int \frac{A+Bx^2}{1-\frac{x^2}{n^2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$
$$= \int \frac{A'+B'y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} + k \log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A', B', m, k des quantités constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x. Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation, que y et x, savoir $f(m,n) = 0$.«

Im Uebrigen wendet sich ABEL in seinen weiteren Arbeiten ganz den allgemeinen Untersuchungen zu, welche die Theorie der Integrale algebraischer Differentiale betreffen, von denen er ursprünglich ausging, und die das Fundament all' seiner Betrachtungen in der Theorie der Transcendenten bilden.

Dasselbe Heft des CRELLE'schen Journals bringt unter dem Titel »*Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes*« die Specialisirung und vollständige Ausführung des der Pariser Akademie im Jahre 1826 eingereichten Aufsatzes über das sogenannte ABEL'sche Theorem für hyperelliptische Integrale;

»Il me semble que dans la théorie des fonctions transcendantes les géomètres se sont bornés aux fonctions de cette forme. Cependant il existe encore pour une classe très étendue d'autres fonctions une propriété analogue à celle des fonctions elliptiques. Je veux parler des fonctions qui peuvent être regardées comme **intégrales de différentielles algébriques quelconques**. Si l'on ne peut pas exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions données, par une seule fonction de la même espèce, comme dans le cas des fonctions elliptiques, au moins on pourra exprimer dans tous les cas une pareille somme par la somme d'un nombre déterminé d'autres fonctions de la même nature que les premières, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique. Nous démontrerons cette propriété dans l'un des cahiers suivans de ce journal. Pour le moment je vais considérer un cas particulier

qui embrasse en même temps les fonctions elliptiques, savoir les fonctions contenues dans la formule $\psi(x) = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R(x)}}$, R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r, une fonction rationnelle«.

Der Satz von der Addition einer Anzahl gleichartiger hyperelliptischer Integrale, deren Summe ein algebraisch-logarithmischer Ausdruck ist, wird zuerst für Integrale von der Form

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}$$

bewiesen, wonach, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze Functionen,

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x),$$
$$\Theta(x)^2\varphi_1(x) - \Theta_1(x)^2\varphi_2(x) = A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_\mu)^{m_\mu}$$

gesetzt wird, und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\mu$ positive oder negative Einheiten bedeuten,

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 m_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2 \psi(x_2) + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi(x_\mu) \\ &= C - \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \log \left\{ \frac{\Theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\Theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \right\} \\ &+ \prod \frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log \left\{ \frac{\Theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \Theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \Theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}} \right\} \end{aligned}$$

ist, und hieraus die analogen Sätze für Integrale der Form

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \text{ und } \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{\varphi(x)}},$$

woraus das Theorem für das allgemeine Integral

$$\psi(x) = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

worin r eine beliebige rationale Function von x bedeutet, zusammengesetzt wird. Den Schluss der Arbeit bildet die Zurückführung der Summe einer beliebigen Anzahl von gleichartigen hyperelliptischen Integralen auf eine feste Anzahl ebensolcher Integrale.

Diese fundamentale Arbeit ABEL's, die wieder in ihren Resultaten und Bezeichnungen massgebend geworden ist für den weiteren Ausbau der Integralrechnung, liess sehr bald auch LEGENDRE die Bedeutung des ABEL'schen Theorems erkennen.

> »Mais le mémoire imprimé sous le n° 30 ayant pour titre : *Remarques sur quelques propriétés générales* etc., sagt LEGENDRE in dem am 16. Januar 1829 an ABEL gerichteten Briefe, me paraît surpasser tout ce que vous avez publié jusqu'à présent par la profondeur de l'analyse qui y règne, ainsi que par la beauté et la généralité des résultats. Ce mémoire occupe peu de place, mais il contient un grand nombre de choses ; il est rédigé en général avec beaucoup d'élégance et de concision ; s'il eût pu être plus développé, j'aurais préféré que vous eussiez suivi un ordre inverse en finissant par les cas les plus généraux. . . .«

und LEGENDRE sucht jetzt auf Grund dieses Theorems selbständige Untersuchungen anzustellen, die er, wie wir schon oben sahen, im dritten Supplemente zu seinem *traité* veröffentlichte.

Gleichzeitig mit der eben besprochenen Arbeit ABEL's erschien im 4. Hefte des 3. Bandes d. J. f. M. unter dem Titel: »*suite des notices sur les fonctions elliptiques*« eine aus Königsberg vom 3. October 1828 datirte Arbeit JACOBIs, in welcher er einerseits darauf hinweist, dass die früher gemachte wichtige Entdeckung von der Zurückführung der Integrale dritter Gattung auf andere Transcendenten mit nur zwei Variabeln die Theorie der elliptischen Integrale dritter Gattung aus den Eigenschaften dieser Fundamentaltranscendenten herzuleiten gestatte, und mit zwei linearen Transformationsformeln der ϑ-Functionen die in seinem Briefe vom 12. Januar 1828 an LEGENDRE als »théorème fondamental de M. ABEL« bezeichnete Relation $\sin \operatorname{am}(iu, k) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(u, k')$ zusammenstellt, andererseits auf die Coefficientenbestimmung der allgemeinen Transformations- und Multiplicationsformeln des elliptischen Integrales erster Gattung näher eingeht;

> »Je suis parvenu à résoudre un problème dont la difficulté avoit éludé longtemps tous mes efforts, savoir de trouver l'expression générale et algébrique des formules de multiplication . . . Or $z = \frac{U}{V}$ étant une Substitution rationelle quelconque qui sert ou à la transformation ou à la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, je suis parvenu à sommer par parties le numérateur et le dénominateur de la substitution à faire et à définir l'un et l'autre au moyen d'une équation à différences partielles entre x et k. Dans le cas de la multiplication on tire de cette équation les expressions générales de $A', A'', A''', \ldots$ On trouve très facilement chaque terme $A^{(m)}$ par les deux termes $A^{(m-2)}$, $A^{(m-4)}$, qui le précèdent«.

JACOBI führt diese Andeutung in der aus Königsberg vom 11. Januar 1829 datirten, im 2. Hefte des 4. Bandes des CRELLE'schen Journals veröffentlichten Arbeit »*Suite des notices sur les fonctions elliptiques*« näher aus, indem, wenn $\alpha = \frac{1+\varkappa^2}{\varkappa}$, $x = \sqrt{\varkappa} \cdot \sin \operatorname{am}(u, \varkappa)$ gesetzt wird, »les fonctions U, V satisferont l'une et l'autre à l'équation aux différences partielles suivante:

$$n(n-1)x^2 z + (n-1)(\alpha x - 2x^3)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - \alpha x^2 + x^4)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$= 2n(\alpha^2 - 4)\frac{\partial z}{\partial \alpha}, \text{«}$$

und sagt in Bezug auf diese Untersuchung in einem Briefe an LEGENDRE vom 14. März 1829:

> »Vous trouverez même dans le 2e cahier du vol. IV du Journal de M. CRELLE une formule à différences partielles très remarquable qui sert à exprimer **généralement** ces coefficients par les deux modules, en supposant connue l'équation aux modules ; de sorte que la formation algébrique des substitutions à faire pour parvenir à une transformation quelconque est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules, formule qui donne en même temps comme cas spécial les expressions algébriques et générales pour la multiplication par un nombre n quelconque **indéfini** : chose très difficile et dont vous avez dû remarquer les premiers exemples dans le 4e cahier du vol. III dudit Recueil. Il sera de même, si l'on fait tout dépendre de l'équation dont les racines donnent les valeurs de ce que vous appelez le **régulateur**, et cela conviendra peut-être encore mieux, ces dernières semblant être plus simples«.

Die letzte oben erwähnte Arbeit schliesst mit dem Theorem:

> »Étant supposés connus tous les modules dans lesquels on peut transformer un module donné $\varkappa$ à l'aide d'une transformation correspondante au nombre n, on peut exprimer par ces modules toutes les quantités de la forme $\sin \operatorname{am} \frac{2mK+2m'iK'}{n}$, m, m' étant des nombres quelconques, sans qu'il étoit nécessaire de résoudre une équation algébrique«.

Endlich werden von JACOBI in der Abhandlung: »*de functionibus ellipticis commentatio*«, welche, aus Königsberg vom April 1829 datirt, im 4. Hefte des 4. Bandes von CRELLE's Journal veröffentlicht wurde, die Transformationsformeln der Integrale zweiter und dritter Gattung in Verbindung mit den Transformationsausdrücken der ϑ-Function hergestellt, die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung, denen U und V genügen, entwickelt,

> »quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, numeratorem et denominatorem substitutionis U, V singulos definiri posse per aequationem differentialem tertii ordinis ... Integrale completum aequationum differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiuntur, in promtu esse non videtur«,

und schliesslich die mit einer quadratischen Exponentialgrösse multiplicirte ϑ-Function in Beziehung auf ihre Perioden und ihre Zusammensetzung zu den elliptischen Functionen näher untersucht.

Während nun JACOBI zumeist mit der Zusammenfassung seiner Resultate für die Herausgabe der *fundamenta* beschäftigt war, deren Druck im April 1829 beendet wurde*, hatte auch ABEL an der Darstellung einer zusammenhängenden Theorie der elliptischen Integrale und Functionen gearbeitet;

> »Je prépare, schreibt er am 18. October 1828 aus Christiania an CRELLE, dans ce moment un mémoire sur les fonctions elliptiques, où j'ai considéré la théorie de ces fonctions sous un point de vue très général. Ce mémoire sera divisé en deux parties. ... «

und eine ähnliche Ankündigung seiner grossen und bedeutungsvollen Resultate, die wir nachher besprechen werden, richtete ABEL auch an LEGENDRE am 3. October 1828;

*Es mag an dieser Stelle noch des zweiten Supplementes zu dem *traité* von LEGENDRE Erwähnung gethan werden, dessen Vorrede das Datum des 15. März 1829 trägt; dasselbe liefert ähnlich wie das erste eine Zusammenfassung der im Laufe des letzten Jahres von ABEL und JACOBI gemachten Entdeckungen und beschäftigt sich hauptsächlich mit der Darstellung der elliptischen Functionen, mit der Summirung gewisser Reihen durch elliptische Functionen, der Behandlung der ϑ-Functionen, der Darstellung der Integrale zweiter und dritter Gattung durch diese Transcendenten und endlich der Entwicklung des ABEL'schen Theorems für hyperelliptische Integrale.

»Je vous félicite, antwortet ihm LEGENDRE am 25. October 1828, bien cordialement des grands succès que vous avez obtenus dans vos travaux sur la théorie des fonctions elliptiques ... mais ce qu'il y a de sûr, c'est que je n'ai aucune idée des moyens que vous avez pu employer pour vaincre de pareilles difficultés. Quelle tête que celle d'un jeune Norvégien !... Peut-être n'êtes vous pas à portée maintenant de publier un semblable ouvrage (wie JACOBI) qui contienne l'ensemble de vos découvertes ; il nous intéresserait beaucoup, Monsieur«,

und am 25. November 1828 erwidert ihm ABEL:

»Les circonstances ne me permettent point de publier un ouvrage de quelque étendue que j'ai composé depuis peu ; car ici je ne trouverai personne qui fera l'imprimer à ses frais«.

Und so überschickte er denn den ersten Theil seiner Arbeit unter dem Titel: »*Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*« CRELLE zur Veröffentlichung, der dieselbe im 3. und 4. Hefte des 4. Bandes, welcher 1829 ausgegeben wurde, abdrucken liess; leider musste CRELLE dieser Arbeit die Schlussworte beifügen:

»c'est jusqu'ici que ce mémoire est parvenu à l'éditeur. M. ABEL est mort (6. April 1829) sans l'avoir fini«.

»Surtout j'ai cherché, sagt ABEL in der Einleitung zu seiner grossen Arbeit, welche die Resultate aller seiner Untersuchungen zusammenfassen und zugleich den Weg zu weiteren Forschungen auf dem Gebiete der Transcendenten weisen sollte, à donner de la généralité à mes recherches, en me proposant des problèmes d'une vaste étendue. Si je n'ai été assez heureux de les résoudre complètement, au moins j'ai proposé les moyens pour y parvenir. L'ensemble de mes recherches sur cet objet formera un ouvrage de quelque étendue, mais que les circonstances ne me permettent pas encore de publier. C'est pourquoi je vais donner ici un Précis de la méthode que j'ai suivie avec les résultats généraux, auxquelles elle m'a conduit.«

Der erste Theil des *précis* beschäftigt sich mit zwei grossen und weitgreifenden Fragen, welche die Theorie der Integrale algebraischer Differentiale und speciell der elliptischen Integrale betreffen. Auf sein allgemeines Additionstheorem für elliptische Integrale der drei Gattungen in der LEGENDRE'schen Normalform sich stützend wirft ABEL die Frage nach der Form auf, welche man dem Integrale eines algebraischen Differentiales geben kann, wenn dieses sich durch algebraisch-logarithmische Functionen und elliptische Integrale ausdrücken lässt und beweist ein Theorem

> »qui est d'un grand usage dans tout le calcul intégral, à cause de sa grande généralité«,

und das in der That die Basis geworden ist für alle weiteren Untersuchungen, welche Reductionsfragen für Integrale algebraischer Differentialien zum Gegenstande haben. Besteht, wenn y eine algebraische Function von x ist, eine Beziehung von der Form

$$\int^x y\,dx = \int^{x_1} f_1\big(x, \Delta(x, c_1)\big)\,dx + \int^{x_2} f_2\big(x, \Delta(x, c_2)\big)\,dx + \ldots$$
$$+u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho,$$

in welcher $x_1, x_2, \ldots u, v_1, v_2, \ldots$ algebraische Functionen von x, A_1, $A_2, \ldots A_\varrho$ Constanten bedeuten, so lässt sich, wie ABEL durch eine überaus geniale Deduction zeigt, daraus eine Relation herleiten:

$$\delta \int^x y\,dx = \int^{\xi_1} f_1\big(x, \Delta(x, c_1)\big)\,dx + \int^{\xi_2} f_2\big(x, \Delta(x, c_2)\big)\,dx + \cdots$$
$$+U + B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \cdots B_\sigma \log V_\sigma,$$

in welcher δ eine ganze Zahl, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \Delta(\xi_1, c_1)$, $\Delta(\xi_2, c_2), \ldots$, U, V_1, $V_2, \ldots V_\sigma$ rationale Functionen von x und y, $B_1, B_2, \ldots B_\sigma$ Constanten bedeuten; und daraus folgt:

> »Si $\int \frac{r\,dx}{\Delta(x,c)}$, où r est une fonction rationnelle quelconque de x, est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques et par les fonctions elliptiques $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$, on pourra toujours supposer
>
> $$\int \frac{r\,dx}{\Delta(x,c)} = p\Delta(x,c) + \alpha\psi(y) + \alpha'\psi_1(y_1) + \cdots$$
> $$+A_1 \log\left(\frac{q_1 + q_1'\Delta(x,c)}{q_1 - q_1'\Delta(x,c)}\right) + \cdots$$

> où toutes les quantités $p, q_1, q_2, \ldots q'_1, \ldots y, y_1, y_2, \ldots$ sont des fonctions **rationnelles** de x«,

ein Satz, den ABEL schon kannte, als er seine erste Arbeit über die Reduction der hyperelliptischen Integrale auf Logarithmen veröffentlichte.

Folgerungen und Erweiterungen dieser Sätze bringt der veröffentlichte Theil des précis nicht mehr, wohl schon desshalb, weil ABEL sich in dieser Arbeit nur mit der Theorie der **elliptischen** Integrale zu beschäftigen beabsichtigte, aber er benutzt diese wichtigen und umfassenden Sätze, um eine zweite wesentliche Frage aufzuwerfen, die so lautet:

> »trouver tous les cas possibles dans lesquels on peut satisfaire à une équation de la forme :
>
> $$\begin{gathered}(\mathrm{a})\ldots \alpha\varpi(x_1, c_1) + \cdots + \alpha_n\varpi(x_n, c_n) + \alpha'_1\varpi_0(x'_1, c'_1) + \cdots \\ +\alpha'_m\varpi(x'_m, c'_m) + \alpha''_1\Pi(x''_1, c''_1, a_1) + \cdots + \alpha''_\mu\Pi(x''_\mu, c''_\mu, a_\mu) \\ = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_\nu \log v_\nu,\end{gathered}$$
>
> où $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, $\alpha'_1, \ldots \alpha'_m$, $\alpha''_1, \ldots \alpha''_\mu$, $A_1, \ldots A_\nu$ sont des quantités constantes, $x_1, \ldots x_n$, $x'_1, \ldots x'_m$, $x''_1, \ldots x''_\mu$ des variables liées entre-elles par des équations algébriques, et $u, v_1, v_2 \ldots v_\nu$ des fonctions algébriques de ces variables«,

und findet den überaus fruchtbaren Satz:

> »Si une équation quelconque de la forme (a) a lieu, et qu'on désigne par c un quelconque des modules qui y entrent, il y en aura parmi les autres an moins un module c' tel, qu'on puisse satisfaire à l'équation différentielle : $\frac{yd}{\Delta(y,c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x,c)}$, en mettant pour y une fonction **rationnelle** de x et vice versa«,

und so wird ABEL von der allgemeinsten additiven Beziehung zwischen elliptischen Integralen auf das rationale Transformationsproblem der elliptischen Integrale erster Gattung, somit wieder auf die früher veröffentlichten Untersuchungen zurückgeleitet.

Auf Grund der gegebenen Reduction kann ABEL leicht die allgemeinste Relation aufstellen, die zwischen elliptischen Integralen mit demselben Modul besteht, und findet für dieselbe eine additive Verbindung von Integralen dritter Gattung, welche zu Coefficienten ganze Zahlen haben, mit einem Integrale erster Gattung von algebraisch-logarithmischen Theilen

abgesehen, deren Discontinuitäten die Unstetigkeitswerthe der Integrale dritter Gattung liefern.

Es folgt endlich eine ausführliche Behandlung des rationalen Transformationsproblems und die Discussion der Auflösung der algebraischen Transformationsgleichung.

Der zweite Theil des *précis*, der auch in seinen Aufzeichnungen nicht in die Oeffentlichkeit gekommen, sollte nach der von ABEL gegebenen Inhaltsangabe die elliptischen Integrale mit einem Modul, der reell und kleiner als 1 ist, behandeln, und sich mit der Umkehrungsfunction des elliptischen Integrales erster Gattung und den Integralen zweiter und dritter Gattung als Functionen dieser beschäftigen; die doppelte Periodicität, die Bestimmung der Nullwerthe der Umkehrungsfunction, das Additionstheorem, die Division dieser Functionen sollten in der schon aus den Arbeiten ABEL's bekannten Art dargestellt werden. Aber ABEL wollte auch in diesem Theile nochmals auf das allgemeine algebraische Transformationsproblem zurückkommen, ausgehend von den periodischen Eigenschaften der elliptischen Umkehrungsfunction, und den schon früher behandelten Satz beweisen:

> »Si deux fonctions réelles peuvent être transformées l'une en l'autre, il faut qu'on ait entre les fonctions complètes ϖ, ω, ϖ', ω' cette relation : $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$, où n' et m sont des nombres entiers«.

Die weiteren Untersuchungen sollten sich mit der Theorie der Modulargleichungen beschäftigen:

> »Si deux modules c' et c peuvent être transformés l'un dans l'autre, ils auront entre eux une relation algébrique. Mais généralement il paraît impossible d'en tirer la valeur de c' en c à l'aide de radicaux, mais il est remarquable, que cela a toujours lieu, si c peut être transformé en son complément, par exemple si $c^2 = \frac{1}{2}$« ;

endlich sollte noch die Theorie derjenigen Transcendenten entwickelt werden, welche den Zähler und Nenner der Umkehrungsfunction des elliptischen Integrales erster Gattung bilden, und alle Resultate des zweiten Theiles des *précis* auf beliebige reelle und imaginäre Integralmoduln ausgedehnt werden.

Diese grosse und umfassende Theorie der elliptischen Transcendenten, wie sie ABEL projectirt hatte, ist leider, wie wir gesehen, nur in einem

kleinen Bruchtheile, der sich lediglich mit der Theorie der elliptischen **Integrale** beschäftigt, veröffentlicht worden,

> »dans ce qu'il a fait, sagt POISSON in seinem *rapport sur l'ouvrage de M.* JACOBI am 21. December 1829, la postérité saura reconnaître tout ce qu'il aurait pu faire, s'il eût vécu davantage«,

und so war es von überaus grosser Bedeutung, dass genau zu derselben Zeit, vor nunmehr 50 Jahren, JACOBI durch seine »*fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*« die mathematische Welt zu einem eingehenden Studium der Theorie der elliptischen Transcendenten und zur Mitarbeit auf diesem neuen Felde analytischer Forschung veranlasste.

Das Werk beginnt mit der Entwicklung der allgemeinen rationalen Transformation;

> »Problema, quod nobis proponimus, generale hoc est: Quaeritur Functio rationalis y elementi x eiusmodi, ut sit:
>
> $$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}}=\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}.$$
>
> Quod Problema et Multiplicationem videmus amplecti et Transformationem«;

und JACOBI findet auf dem in seinen ersten Arbeiten angedeuteten Wege:

> »Iam igitur demonstratum est, formam
>
> $$y=\frac{a+a'x+a''x^2+\cdots+a^{(p)}x^p}{b+b'x+b''x^2+\cdots+b^{(p)}x^p},$$
>
> quicunque sit numerus p, ita determinari posse, ut prodeat:
>
> $$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}}=\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}.$$
>
> Quod est Principium in Theoria Transformationum Functionum Ellipticarum Fundamentale«.

Nachdem das allgemeine elliptische Differential erster Gattung durch eine Transformation zweiten Grades auf die LEGENDRE'sche Normalform reducirt, und somit der obige Transformationssatz auf die Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

übertragen ist, werden je nach den Formen

$$y = \frac{x(a + a'x^2 + \cdots + a^{(m-1)}x^{2m-2})}{1 + b'x^2 + \cdots + b^{(m)}x^{2m}},$$
$$y = \frac{x(a + a'x^2 + \cdots + a^{(m)}x^{2m})}{1 + b'x^2 + \cdots + b^{(m)}x^{2m}}$$

die Transformationen gerader und ungerader Ordnung unterschieden, und nun Eigenschaften der Functionen U und V in der rationalen Transformation $y = \frac{U}{V}$ entwickelt, welche sich auf die Substitution $\frac{1}{kx}$ für x und $\frac{1}{\lambda y}$ für y beziehen. Es folgt die vollständige Ausführung der Transformation dritten und fünften Grades mit der Entwicklung der zugehörigen Modulargleichungen, und hieran sich schliessend der Satz, dass zwei nach einander angewandte Substitutionen bestimmter Art die Multiplication liefern.

Nun führt JACOBI die Umkehrungsfunction des Integrales erster Gattung ein;

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = u, \quad x = \sin\operatorname{am} u$$

lautet die Zusammenstellung der beiden Gleichungen, welche das Umkehrungsproblem der elliptischen Integrale ausdrücken und aus welchen mit Hülfe des EULER'schen Additionstheorems der Charakter der doppelten Periodicität dieser Function, ihre Nullwerthe, ihre Unendlichen und ihre Veränderungen bei Vermehrung um halbe Perioden geschlossen werden.

Mit Hülfe dieser elliptischen Function werden nun die expliciten

Transformationsausdrücke in den Fundamentalformeln

$$U = \frac{x}{M}\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} 4\omega}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} 8\omega}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega}\right).$$

$$V = (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega \cdot x^2)(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 8\omega \cdot x^2)\cdots$$
$$\cdots(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega \cdot x^2)$$

$$\lambda = \varkappa^n \{\sin\operatorname{co}\operatorname{am} 4\omega \cdot \sin\operatorname{co}\operatorname{am} 8\omega \cdots \sin\operatorname{co}\operatorname{am} 2(n-1)\omega\}^4$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{\frac{\sin\operatorname{co}\operatorname{am} 4\omega \cdot \sin\operatorname{co}\operatorname{am} 8\omega \cdots \sin\operatorname{co}\operatorname{am} 2(n-1)\omega}{\sin\operatorname{am} 4\omega \cdot \sin\operatorname{am} 8\omega \cdots \sin\operatorname{am} 2(n-1)\omega}\right\}^2$$

gefunden, indem, wie schon früher hervorgehoben, für die durch Analogie ermittelten Ausdrücke die Transformationsgleichung verificirt wird. Hieran schliessen sich weitere Ausführungen der Transformationstheorie; es werden die verschiedenen, durch Specialisirung der Werthe m und m' in dem Ausdrucke $\omega = \frac{mK+m'iK'}{n}$ entspringenden Transformationsformeln untersucht, die Zahl der wesentlich verschiedenen Transformationen bestimmt, und besonders die den beiden Werthen $\omega = \frac{K}{n}$ und $\omega = \frac{iK'}{n}$ zugehörigen hervorgehoben, für welche sämmtliche Transformationsausdrücke sowie die Beziehungen zwischen den ursprünglichen und transformirten Perioden entwickelt werden; es ergiebt sich daraus die Erweiterung des früher für die Transformation dritten und fünften Grades bewiesenen Satzes:

> »Itaque post transformationem primam adhibita secunda seu post secundam adhibita prima, Modulus *k* in se redit, seu transformationes prima et secunda successive adhibitae, utro ordine placet, Multiplicationem praebent«;

daraus folgen dann unmittelbar die allgemeinen analytischen Formeln für die Multiplication der elliptischen Functionen.

Nun unterwirft JACOBI die oben gefundenen Modulargleichungen für die Transformation dritten und fünften Grades einer näheren Betrachtung, und sieht leicht, dass dieselben unverändert bleiben, wenn beliebige, aber dieselben Transformationen auf den primären und abgeleiteten Modul ausgeübt werden. Die von LEGENDRE gefundene Differentialgleichung

zweiter Ordnung für die Perioden der elliptischen Functionen führt ihn zu dem eleganten Ausdrucke für den Multiplicator der Transformation

$$M^2 = \frac{1}{n} \frac{\lambda(1-\lambda^2)\, d\varkappa}{\varkappa(1-\varkappa^2)\, d\lambda}$$

und zugleich zu jener merkwürdigen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\begin{aligned} & 2\, d\varkappa\, d\lambda \{ d\lambda\, d^3\varkappa - d\varkappa\, d^3\lambda \} - 3\{ d\lambda^2\, d^2\varkappa^2 - d\varkappa^2\, d^2\lambda^2 \} \\ & + d\varkappa^2\, d\lambda^2 \left\{ \left(\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa - \varkappa^3} \right) d\varkappa^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda - \lambda^3} \right) d\lambda^2 \right\} = 0, \end{aligned}$$

der alle transformirten Moduln genügen.

Die elliptische Umkehrungsfunction trat in die Ausdrücke für die algebraische Transformation der Integrale ein, aber für die Function selbst waren analytische Darstellungen noch nicht gefunden; von der Transformation n^{ten} Grades ausgehend gelangt JACOBI, indem er n unendlich gross werden lässt, zur Darstellung der elliptischen Functionen $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ in Form von Quotienten von unendlichen Producten und Partialbrüchen, und daraus wieder zu den bekannten Formeln für $\varkappa$ und K, als Quotienten von unendlichen Producten, die nach den Potenzen der Grösse $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$ fortschreiten, sowie zu anderen interessanten Ausdrücken für diese Grössen durch wiederholte Anwendung der Transformation zweiten Grades.

Es folgt eine zweite Darstellung der elliptischen Functionen und zwar durch FOURIER'sche Reihen, und mit Hülfe dieser werden wiederum die Summen einer grossen Anzahl von unendlichen, nach Ausdrücken in q fortschreitenden Reihen hergeleitet, welche sich durch den Integralmodul und die Perioden des elliptischen Integrales ausdrücken. Ebenso werden die Quadrate der elliptischen Functionen und ihre reciproken Werthe, allgemein die n^{ten} Potenzen derselben sowie deren reciproke Werthe in sinus- und cosinus-Reihen auf doppelte Weise entwickelt, wobei für die letzteren Entwicklungen interessante und später in der Theorie der allgemeinen doppelperiodischen Functionen verwerthete Methoden benutzt werden, und sodann mit Einführung der durch die Gleichung

$$Z(u) = \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1}$$

definirten Function diese Entwicklungen für die Darstellung der Integrale zweiter Gattung in Form von FOURIER'schen Reihen verwendet.

Die Darstellung der Integrale dritter Gattung leitet JACOBI mit den beiden wichtigen Sätzen ein, die schon oben angedeutet wurden:

> »ita ut tertia species Integralium Ellipticorum, quae ab elementis tribus pendet, Modulo $\varkappa$, Amplitudine φ, Parametro α, revocata sit ad speciem primam et secundam, et Transcendentem novam
> $$\int_0^\varphi \frac{E(\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$
> quae tantum a duobus elementis pendent omnes«,

und

> »qua formula Integralia tertiae speciei indefinita revocantur ad definita, in quibus Amplitudo Parametrum aequat, ideoque quae ab elementis tribus pendebant, ad alias Transcendentes, quae tantum duobus constant«,

endlich mit dem Satze von der Vertauschung der Amplitude und des Parameters, und giebt dann die FOURIER'sche Entwicklung dieser Integrale. Hier tritt nun die neue JACOBI'sche Transcendente $\Theta(u)$ ein, definirt durch die Gleichung

$$\Theta(u) = \Theta(0)e^{\int_0^u Z(u)\,du},$$

und wird zugleich das Integral dritter Gattung durch diese Fundamentaltranscendente ausgedrückt, für welche analytische Darstellungen entwickelt werden. Die Additionstheoreme der Integrale dritter Gattung für die Amplitude und den Parameter werden mit Hülfe der Additionstheoreme der Θ-function in verschiedenen Formen aufgestellt, und mit Hülfe gewisser Formeln für die lineare Transformation der Θ-function auf Grund der von LEGENDRE in dem *traité* ausgeführten Untersuchungen das Theorem abgeleitet:

> »Integrale propositum formae
> $$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)},$$
> quodcunque sit n et φ, sive reale sive imaginarium, revocari potest ad integralia similia, in quibus et φ reale et n reale negativum inter 0 et -1«.

Jetzt verlässt JACOBI wieder die Theorie der Integrale und kehrt zu der der elliptischen Functionen zurück; nach Einführung der Θ-Function, welche den Nenner der sin am bildet, soll auch der Zähler derselben als selbständige Transcendente H der Theorie zu Grunde gelegt werden, die cos am und Δ am u drücken sich alsdann als Quotienten derselben Transcendenten aus nur mit Argumenten, welche um halbe Perioden von den ersteren verschieden sind; wesentlich ist nun der durch die Gleichung

$$H(u+iK') = ie^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}}\Theta(u)$$

definirte Zusammenhang zwischen den beiden Transcendenten, welcher die ganze Theorie somit auf **eine** Fundamentaltranscendente zurückführt, und aus welchem eine Reihe weiterer Beziehungen zwischen diesen Functionen sich unmittelbar ergiebt.

Für die durch unendliche Producte definirten Θ- und H-Functionen werden die bekannten eleganten Entwicklungen nach den sinus und cosinus der Vielfachen des Argumentes durch Benutzung der Beziehungen zwischen jenen Functionen bei Vermehrung des Argumentes um ganze und halbe Perioden der elliptischen Functionen hergeleitet, und aus diesen Entwicklungsformen die berühmten JACOBI'schen Reihen wie

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + \cdots$$

u. s. w. ermittelt.

Die Darstellung der Θ-Function in einer FOURIER'schen Reihe liefert eine dritte Darstellung der Integrale zweiter und dritter Gattung, und die verschiedenen analytischen Formen der elliptischen Functionen geben eine Reihe interessanter Identitäten zwischen unendlichen Producten und unendlichen Reihen, welche nach Potenzen der Grösse q fortschreiten. Das Werk schliesst mit der Benutzung dieser Beziehungen zum Beweise des Satzes, dass jede Zahl sich als eine Summe von vier Quadraten darstellen lasse.

Dies ist in wenigen Worten der reiche Inhalt jenes grossen Werkes, dessen Entstehung oben eingehend behandelt worden, und das in Kurzem in den gesammelten Werken JACOBI's neu erscheinen wird.

Von einer Vergleichung der Arbeiten ABEL's und JACOBI's auf dem Gebiete der elliptischen Transcendenten kann hier nicht wohl die Rede sein;

die Jahre 1826–29, welche uns allein in diesen Blättern beschäftigt haben, bilden für JACOBI die erste Zeit seiner noch zwanzigjährigen grossartigen und fruchtbringenden Thätigkeit auf allen Gebieten der mathematischen Wissenschaft, dagegen schliessen jene drei Jahre die ganze Zeit der wissenschaftlichen Arbeit des in einem Alter von 27 Jahren der Wissenschaft entrissenen eminenten Mathematikers ABEL ein. Nicht bloss wir, die wir die Keime der Arbeiten ABEL's sich haben entwickeln und so reiche Früchte haben hervorbringen sehen, staunen bei der Betrachtung seiner tiefen, umfassenden und für alle Zeiten bahnbrechenden Forschungen, auch die Mitlebenden waren sich der ganzen Grösse jenes Geistes vollauf bewusst:

> »En fermant cette lettre, sagt LEGENDRE in dem am 4. Juni 1829 an JACOBI gerichteten Briefe, je viens d'apprendre avec une profonde douleur que votre digne émule M. ABEL est mort à Christiania des suites d'une maladie de poitrine dont il était affecté depuis quelque temps et qui a été aggravée par les rigueurs de l'hiver. C'est une perte qui sera vivement sentie de tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'analyse mathématique considerée dans ce qu'elle a de plus élevé. Au reste dans le court espace de temps qu'il a vécu il a élevé un monument qui suffira pour rendre sa memoire durable et donner une idée de ce qu'on aurait pu attendre de son génie ni fata obstetissent«,

und JACOBI schreibt darauf am 14. Juni 1829 an LEGENDRE:

> »Les vastes problèmes qu'il s'était proposés, d'établir des critères suffisants et nécessaires pour qu'une équation algébrique quelconque soit résoluble, pour qu'une intégrale quelconque puisse être exprimée en quantités finies, son invention admirable de la propriété générale qui embrasse toutes les fonctions qui sont des intégrales de fonctions algébriques quelconques, etc., marquent un genre de questions tout à fait particulier, et que personne avant lui n'a osé imaginer. Il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple«.

Da ich mir in diesen Blättern nur die Aufgabe gestellt habe, die Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826–29 zu skizziren, so bleibt mir nur noch übrig, die hierauf bezüglichen GAUSS'schen Arbeiten, soweit sie aus seinen Veröffentlichungen oder

durch seinen Nachlass bekannt geworden sind, und die zum grossen Theil schon aus einer weit früheren Zeit stammen, kurz zu besprechen, um ihre Beziehungen zu den Arbeiten ABEL's und JACOBI's festzustellen, welche vorher einer eingehenden Erörterung unterzogen worden sind; ich lege hierbei die von SCHERING zu jenen Nachlassarbeiten gemachten Zeitbestimmungen zu Grunde, welche ich für die Besprechung derselben als massgebend betrachten werde.

SCHERING hebt hervor, dass nach Mittheilung über eine mündliche Aeusserung von GAUSS derselbe schon im Jahre 1794 die Beziehungen zwischen dem arithmetisch-geometrischen Mittel und den Potenzreihen, in denen die Exponenten mit den Quadratzahlen fortschreiten, d. h. in unserer jetzigen Sprache die Entwicklung des ganzen elliptischen Integrales K nach Potenzen von q oder die Gleichung $K = 2\pi\vartheta_3^2$, welche oben als eine der schönsten Entdeckungen JACOBI's bezeichnet wurde, gekannt zu haben scheint.

Es liegt eine handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS in den Worten vor:

> »Functiones Lemniscaticas considerare coeperamus 1797. Januar 8«;

derselbe geht in der erweislich frühesten Untersuchung, welche den Titel trägt: »*Elegantiores integralis* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *proprietates*«, von dem Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ aus, entwickelt, indem er die Umkehrungsfunction bildet und

$$\mathrm{sl} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x, \quad \mathrm{cl}\left(\frac{\omega}{2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right) = x$$

setzt, die Additionstheoreme für $\mathrm{sl}(a \pm b)$, $\mathrm{cl}(a \pm b)$, bestimmt die Nullwerthe dieser Lemniscatischen Functionen, und leitet das Multiplicationstheorem für $\mathrm{sl}(n\varphi)$ und $\mathrm{cl}(n\varphi)$, sowie die nach Potenzen fortschreitenden Entwicklungen für $\mathrm{arc\,sl}\, x$ und $\mathrm{sl}\, \varphi$ her. Endlich werden der Zähler und Nenner von $\mathrm{sl}\,\varphi$ als selbständige Transcendente $P(\varphi)$ und $Q(\varphi)$ eingeführt und ihre Potenzentwicklungen mit Bestimmung der Convergenzgrenze hergestellt; es sind genau die für $k^2 = -1$ specialisirten WEIERSTRASS'schen Functionen $\mathrm{Al}(w)_1$ und $\mathrm{Al}(w)_0$.

In einem im Juli 1798 begonnenen Notizbuche wird unter dem Titel: *de curva lemniscata* das algebraische Integral der Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1-y^4}} = 0$, und aus diesem das Additionstheorem für $\mathrm{sl}(p \pm q)$ hergeleitet, und sodann für den Zähler und Nenner $P(\varphi)$ und $Q(\varphi)$ von

$\mathrm{sl}(\varphi)$ die Entwicklung in einfach unendliche Producte hergestellt, deren Factoren

$$1+\frac{4s^2}{(e^{k\pi}-e^{-k\pi})^2}, \text{ resp. } 1-\frac{4s^2}{\left(e^{\frac{(2k+1)\pi}{2}}+e^{\frac{-(2k+1)\pi}{2}}\right)^2}$$

sind; GAUSS bemerkt zu dieser analytischen Darstellung der transcendenten Functionen:

»id quod rigorose demonstrare possumus« – und wir dürfen daher wohl annehmen, dass GAUSS schon damals zum Theil in dem Besitze der functionentheoretischen Sätze war, welche sich auf die Entwicklung einer eindeutigen Function in unendliche Producte beziehen. Es werden weiter zwischen $P(\varphi)$ und einer neu definirten Function $\mathfrak{P}(\varphi)$ (welche das $P(\varphi)$ der obigen Definition ist) Relationen von der Form

$$\mathfrak{P}(\psi\omega)=e^{\frac{1}{2}\pi\psi^2}P(\psi\omega)$$

aufgestellt, welche in den jetzt gebräuchlichen Zeichen

$$\mathrm{Al}(w)_1=\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}e^{-\frac{E\varkappa^2}{2\Omega}}\frac{\vartheta\left(\frac{2w}{\Omega}\right)_1}{\vartheta_1}$$

lauten, und endlich noch die Entwicklung von $\mathrm{sl}(\varphi)$ in Partialbrüche und die von $\log P(\psi\omega)$ nach cosinus der Vielfachen von $2\psi\pi$ gegeben.

Ein im November 1799 angefangenes Notizbuch bringt für die Lemniscate die Entwicklung der Functionen $P(\psi\omega)$ und $Q(\psi\omega)$ nach der FOURIER'schen Reihe und die schon bei früherer Gelegenheit erwähnte Entwicklung für die Grösse

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}=1-2e^{-\pi}+2e^{-4\pi}-\cdots,$$

ferner FOURIER'sche Entwicklungen für $\frac{1}{\mathrm{sl}(\psi\omega)}$, $P^2(\psi\omega)$, $Q^2(\psi\omega)$ und unter dem Titel: »*Variae Summationes serierum absconditae*« Resultate der Form

$$\left[\frac{2}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}\right]^2+\cdots=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2}-\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{2}$$

und eine Productentwicklung für die Periode:

$$\frac{\omega}{2}=\frac{3}{2}\,\frac{4}{5}\,\frac{7}{6}\,\frac{8}{9}\,\frac{11}{10}\,\frac{12}{13}\cdots;$$

endlich sind mit Hülfe des arithmetisch-geometrischen Mittels, auf das wir nachher zurückkommen, Formeln für die Fünftheilung der Lemniscate aufgestellt, die offenbar in Verbindung stehen mit jenen allgemeinen Sätzen von der Theilung der Lemniscate, die GAUSS schon, wie oben hervorgehoben worden, bei der Veröffentlichung der *disquisitiones arithmeticae* kannte und die erst 30 Jahre später ABEL wieder gefunden. Zugleich mit diesen Untersuchungen über die lemniscatischen Functionen wandte sich aber GAUSS schon der Theorie der **allgemeinen** elliptischen Integrale und Functionen zu. In einem Handbuch, dessen Titelblatt die Aufschrift trägt: »*Varia, imprimis de Integrali* $\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu\mu \sin^2 u}}$, *Novembr. 1799*« finden wir für das allgemeine elliptische Integral erster Gattung, welches in der von LEGENDRE gewählten Normalform zu Grunde gelegt wird, das Umkehrungsproblem behandelt, wie es uns erst so viele Jahre später von ABEL und JACOBI gegeben worden. Vorausgesetzt wird dabei die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels oder die Kenntniss des Satzes, dass, wenn man auf das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}$$

die Substitution

$$\sin T = \frac{2m \sin T'}{(m+n)\cos^2 T' + 2m \sin^2 T'}$$

anwendet und

$$\frac{m+n}{2} = m', \quad \sqrt{mn} = n'$$

setzt, das Integral in

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT'}{2\pi\sqrt{m'^2\cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'}}$$

übergeht, so dass sich bei Fortsetzung des Verfahrens durch successive Bildung des arithmetischen und geometrischen Mittels für $m', n', m'', n'', \ldots,$ welche sich beide der festen gemeinsamen Grenze $\mu = M(m,n)$ nähern,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2 T + n^2 \sin^2 T}} = \frac{1}{\mu}$$

ergiebt, Auseinandersetzungen, die GAUSS viel später zuerst in der im Januar 1818 erschienenen Arbeit: »*Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta ...*« veröffentlichte; er sagt in seiner Selbstanzeige vom 9. Februar 1818:

»Der Verfasser hat indessen diese erste sich ihm darbietende Gelegenheit benutzt, um die ersten Linien eines **neuen Algorithmus** zu geben, dessen er sich schon seit einer langen Reihe von Jahren zur Bestimmung dieser Transcendenten bedient hat, und worüber er in Zukunft eine ausgedehnte zu vielen merkwürdigen Resultaten führende Untersuchung bekannt machen wird.«

und er deutet auch an, dass er längst im Besitze einer umfangreichen Theorie der elliptischen Transcendenten ist, von der die Untersuchungen LAGRANGE's und LEGENDRE's nur die Anfänge bilden:

»Aufmerksamen Lesern wird es nicht entgehen, wie viele interessante Aufgaben, die mit den hier betrachteten Transcendenten zusammenhängen, durch den erklärten Algorithmus mit grösster Leichtigkeit aufgelöst werden. Als ein Beispiel führen wir hier die Rectification der Ellipse an. Setzt man ihre halbe grosse Axe $= n$, so wird die Peripherie: $\frac{2\pi}{\mu}\{m'^2 - 2(m''^2 - n''^2) - 4(m'''^2 - n'''^2) - \cdots\}$. Ein anderes Beispiel giebt die Dauer der Pendelschwingungen bei endlichen Bogen, welche sich zu der Dauer der unendlich kleinen Schwingungen verhält, wie die Einheit zu dem arithmetisch-geometrischen Mittel zwischen 1 und dem Cosinus von einem Viertel des ganzen Schwingungsbogens. Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass der Verfasser diese Resultate, so wie er sie schon vor vielen Jahren unabhängig von ähnlichen Untersuchungen LAGRANGE's und LEGENDRE's gefunden hat, in ihrer ursprünglichen Form darstellen zu müssen geglaubt hat, obgleich sie zum Theil aus den Entdeckungen dieser Geometer leicht hätten abgeleitet werden können, theils weil jene Form ihm wesentliche Vorzüge zu haben schien, theils weil sie grade so den Anfang einer viel ausgedehnteren Theorie ausmachen, wo seine Arbeit eine ganz verschiedene Richtung von der der genannten Geometer genommen hat«.

Die Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel sind von GAUSS unter dem Titel:

De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmetico-geometricorum

und

> *De functionibus transcendentibus quae ex differentiatione mediorum arithmetico-geometricorum oriuntur*

fortgesetzt in einem Handbuche, welches vom Jahre 1800 an benutzt wird, und in welchem Reihenentwicklungen für das arithmetisch-geometrische Mittel, sowie sehr stark convergirende Reihen für *d. M.* (x, y) nach den Grössen x und y und den durch die angegebenen Operationen aus diesen abgeleiteten aufgestellt sind.

Von diesen Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel ausgehend begründet nun GAUSS die Theorie der elliptischen Integrale und deren Umkehrungsfunctionen, indem er in

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu^2 \sin^2 u}} = \varphi$$

$\mu = \operatorname{tg} v$ substituirt, die Perioden durch die Ausdrücke definirt:

$$\frac{\pi}{M(1, \sqrt{1+\mu^2})} = \frac{\pi \cos v}{M(1, \cos v)} = \omega$$
$$\frac{\pi}{\mu M\left(1, \sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}\right)} = \frac{\pi \cos v}{M(1, \sin v)} = \omega',$$

und $\sin u = S(\varphi) = S(\psi\omega)$ setzt; für die eindeutige Umkehrungsfunction giebt er die trigonometrische Entwicklung, setzt

$$S(\psi\omega) = \frac{T(\psi\omega)}{W(\psi\omega)},$$

worin die T und W bis auf constante Factoren die spätern ϑ_1 und ϑ_0 sind, und entwickelt diese Functionen und ihre Quadrate in FOURIER'sche Reihen sowie in unendliche Producte genau in der Form der von ABEL und JACOBI gewählten Darstellungen.

Alle diese Untersuchungen waren wahrscheinlich schon im Jahre 1798 vollendet, wie aus der folgenden Stelle des schon oben erwähnten Briefes von CRELLE an ABEL hervorgeht, in welchem einer Mittheilung von GAUSS Erwähnung gethan wird, in der es heisst:

> »Il (ABEL) vient d'enfiler précisément la même route dont je suis sorti en 1798«.

Unter dem Titel: »*Einige neue Formeln die Lemniscatischen Functionen betreffend*« findet sich in einem im November 1801 begonnenen Handbuche eine Reihe interessanter Resultate, die wahrscheinlich schon viel früher gefunden worden; von der complexen Multiplication der lemniscatischen Function ausgehend wird die Reihenentwicklung für dieselbe aufgestellt, und die Differentialgleichung für die Transcendente $P(\varphi)$ sowie deren Potenzreihe entwickelt.

Die einzige Veröffentlichung vereinzelter hierher gehöriger Untersuchungen, wenn wir von der bekannten Stelle in den *disquisitiones arithmeticae* absehen, findet sich in der »*Summatio quarundam serierum singularium*« betitelten und im September 1808 veröffentlichten Abhandlung, worin Reihen und Producte untersucht sind, die der Theorie der elliptischen Functionen angehören, und in der *determinatio attractionis* etc. vom Januar 1818, worin, wie schon oben hervorgehoben worden, zuerst das arithmetisch-geometrische Mittel eingeführt wird.

Vom Jahre 1808 liegt eine Reihe wichtiger Untersuchungen vor, betitelt: »*Zur Theorie der transcendenten Functionen gehörig*«; dort geht GAUSS von der Definition der ϑ-Function, die er mit T bezeichnet, als einer unendlichen Summe von Exponentialgrössen mit quadratischem Exponenten aus, entwickelt dieselbe in die bekannte Reihe nach cosinus der Vielfachen des Argumentes, stellt Beziehungen zwischen den verschiedenen ϑ-Functionen für den Nullwerth des Argumentes auf, entwickelt die Formel für eine Transformation zweiten Grades dieser Transcendenten und behandelt die Theilungsgleichung für 3, 5 und 7; endlich wird die ϑ-Function in ein unendliches Doppelproduct entwickelt und mit Hülfe dieser Entwicklung eine lineare Transformationsformel für dieselbe aufgestellt; wir wissen aus dem schon oben erwähnten Briefe JACOBI's an LEGENDRE vom 5. August 1827, dass GAUSS im Jahre 1808 ausser der Entwicklung der 3, 5 und 7-Theilung auch die Modulnketten hergestellt hat, welche diesen Transformationsgraden entsprechen.

Das am 28. April 1809 geendigte Handbuch liefert uns Relationen zwischen den ϑ-Functionen für den Nullwerth des Arguments und vielfache Moduln, und auch Beziehungen zwischen den ϑ-Functionen mit willkührlichem Argument. Aber interessantere und wichtigere Untersuchungen, die wieder in die weit späteren Arbeiten von ABEL hineinragen, weist das am 2. Mai 1809 geendigte Handbuch auf; wir finden dort unter dem Titel: »*Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel*« Beziehungen zwischen den ϑ-Functionen mit dem Modul τ zu den entsprechenden für die Moduln 4τ, $16\tau, \ldots$, die Reihenentwicklungen der ϑ-Functionen mit verschwindender Variabeln, Bezie-

hungen zwischen den verschiedenen ϑ-Functionen für den um 1 vermehrten ϑ-Modul, und die vollständige lineare Transformation dieser Transcendenten für den Nullwerth des Argumentes. Sodann werden die Relationen in Betracht gezogen, welche zwischen den constanten ϑ-Functionen für lineare Beziehungen zwischen solchen ϑ-Moduln bestehen, welche Lösungen quadratischer Gleichungen mit derselben negativen Determinante sind, d. h. für die Moduln complexer Multiplication. Es folgen endlich die Transformationsformeln zweiten Grades für die ϑ-Function, die partielle Differentialgleichung für dieselbe und die bekannten Formeln für das zweite logarithmische Differential dieser Transcendenten.

Das im Mai 1809 angefangene Handbuch liefert die Additions- und Multiplicationsformeln (auch mit complexen Multiplicatoren) sowie die zum Grade n gehörigen Transformationsausdrücke für die zu den lemniscatischen Functionen gehörigen ϑ-Functionen, und die »*Hundert Theoreme über die neuen Transcendenten*«, für deren Abfassung sich nach SCHERING eine Zeitangabe nicht machen liess, beschäftigen sich mit der Entwicklung der ϑ-Functionen, liefern einfache Transformationsfälle dieser Transcendenten für den Nullwerth des Arguments und weitere Beziehungen zwischen dem arithmetisch-geometrischen Mittel und eben diesen Functionen.

Erst vom 20. Februar 1817 findet sich eine weitere Aufzeichnung von GAUSS über die »*Lemniscatische Function*«, welche, indem $\mathrm{sl}\, X = x$, $\int x^2\, dX = F(X)$ gesetzt wird, nur das längst bekannte Additionstheorem der Integrale zweiter Gattung in der Form $F(a+b) = F(a) + F(b) - \mathrm{sl}\, a \cdot \mathrm{sl}\, b \cdot \mathrm{sl}(a+b)$ enthält.

Die Untersuchungen ABEL's und JACOBI's bilden für GAUSS von Neuem die Veranlassung, zu den längst verlassenen Studien zurückzukehren. Wie SCHERING hervorhebt, ist aus den Briefen von GAUSS an SCHUMACHER vom 4. und 19. August 1827 ersichtlich, dass SCHUMACHER vor dem Erscheinen der Briefe JACOBI's in den astronomischen Nachrichten dieselben im Original GAUSS überschickte, und wir finden im Nachlasse von GAUSS, wahrscheinlich durch die Lectüre des ersten Briefes von JACOBI an SCHUMACHER veranlasst, in einem Aufsatze, betitelt: »*Allgemeines Theorem (1827. Aug. 6)*«, die Transformation 2, 3, 7ten Grades durchgeführt und zwar mit Hülfe der zu diesen Graden gehörigen Transformationsformeln für die P, Q, R, S, die JACOBI'schen ϑ-Functionen, somit auf Grund einer Transformationsmethode, wie sie erst in den weiteren Arbeiten von JACOBI angedeutet und später ausgeführt worden ist. Der zweite Brief JACOBI's, der den allgemeinen analytischen Ausdruck für die rationale Transformation liefert, veranlasst GAUSS (Aug. 29) zu Untersuchungen,

welche die Beziehungen zwischen den transformirten und ursprüngliche ϑ-Functionen für den Nullwerth des Argumentes zum Gegenstand haben, und zur Aufstellung der Modulargleichung für die Transformation 5ten Grades führen auf einem Wege, wie er erst nach langer Zeit von den Mathematikern wieder betreten worden. Den Schluss dieser bis in die von uns behandelte Zeit reichenden Aufzeichnungen bildet die Entwicklung eines Hauptfalles der linearen Transformation der ϑ-Functionen und der Convergenzbedingung derselben, und unmittelbar damit verbunden ein Satz aus dem Gebiete der Functionentheorie:

> »Wenn innerhalb einer begrenzten Figur überall
>
> $$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0,$$
>
> an der Grenze hingegen V constant $= A$ ist, so ist nothwendig auch im ganzen Raume $V = A$«.

Ueberblicken wir die Gesammtheit der durch die Veröffentlichung des GAUSS'schen Nachlasses uns zugänglich gewordenen Untersuchungen dieses unvergleichlich grossen Mathematikers, so werden wir nicht zu weit gehen, wenn wir behaupten, dass ein grosser Theil der von ABEL und JACOBI der mathematischen Wissenschaft zugeführten Resultate und Methoden in der Theorie der elliptischen Transcendenten wenigstens in den Grundzügen von GAUSS fast 30 Jahre früher aufgefunden worden, und dass von grossen und umfassenden Gebieten in dieser Theorie eigentlich nur die algebraischen Untersuchungen JACOBI's aus der Theorie der elliptischen Functionen sowie dessen Entdeckungen, die Einführung der ϑ-Functionen in die Theorie der Integrale zweiter und dritter Gattung betreffend, und die Arbeiten ABEL's über das nach ihm benannte Theorem und die Theorie der allgemeinen Transformation und Reduction der Integrale algebraischer Differentiale hiervon ausgenommen werden können.

the work. You can easily comply with the terms of this agreement by keeping this work in the same format with its attached full Project Gutenberg-tm License when you share it without charge with others.

1.D. The copyright laws of the place where you are located also govern what you can do with this work. Copyright laws in most countries are in a constant state of change. If you are outside the United States, check the laws of your country in addition to the terms of this agreement before downloading, copying, displaying, performing, distributing or creating derivative works based on this work or any other Project Gutenberg-tm work. The Foundation makes no representations concerning the copyright status of any work in any country outside the United States.

1.E. Unless you have removed all references to Project Gutenberg:

1.E.1. The following sentence, with active links to, or other immediate access to, the full Project Gutenberg-tm License must appear prominently whenever any copy of a Project Gutenberg-tm work (any work on which the phrase "Project Gutenberg" appears, or with which the phrase "Project Gutenberg" is associated) is accessed, displayed, performed, viewed, copied or distributed:

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at www.gutenberg.org

1.E.2. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is derived from the public domain (does not contain a notice indicating that it is posted with permission of the copyright holder), the work can be copied and distributed to anyone in the United States without paying any fees or charges. If you are redistributing or providing access to a work with the phrase "Project Gutenberg" associated with or appearing on the work, you must comply either with the requirements of paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 or obtain permission for the use of the work and the Project Gutenberg-tm trademark as set forth in paragraphs 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.3. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is posted with the permission of the copyright holder, your use and distribution must comply with both paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 and any additional terms imposed by the copyright holder. Additional terms will be linked

or cause to occur: (a) distribution of this or any Project Gutenberg-tm
work, (b) alteration, modification, or additions or deletions to any
Project Gutenberg-tm work, and (c) any Defect you cause.

Section 2. Information about the Mission of Project Gutenberg-tm

Project Gutenberg-tm is synonymous with the free distribution of
electronic works in formats readable by the widest variety of computers
including obsolete, old, middle-aged and new computers. It exists
because of the efforts of hundreds of volunteers and donations from
people in all walks of life.

Volunteers and financial support to provide volunteers with the
assistance they need, are critical to reaching Project Gutenberg-tm's
goals and ensuring that the Project Gutenberg-tm collection will
remain freely available for generations to come. In 2001, the Project
Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure
and permanent future for Project Gutenberg-tm and future generations.
To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation
and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4
and the Foundation web page at http://www.pglaf.org.

Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive
Foundation

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non profit
501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the
state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal
Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification
number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at
http://pglaf.org/fundraising. Contributions to the Project Gutenberg
Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent
permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S.
Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered
throughout numerous locations. Its business office is located at
809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email
business@pglaf.org. Email contact links and up to date contact
information can be found at the Foundation's web site and official
page at http://pglaf.org

For additional contact information:
Dr. Gregory B. Newby
Chief Executive and Director
gbnewby@pglaf.org

Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations ($1 to $5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit http://pglaf.org

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.

Please check the Project Gutenberg Web pages for current donation methods and addresses. Donations are accepted in a number of other ways including checks, online payments and credit card donations. To donate, please visit: http://pglaf.org/donate

Section 5. General Information About Project Gutenberg-tm electronic

works.

Professor Michael S. Hart is the originator of the Project Gutenberg-tm concept of a library of electronic works that could be freely shared with anyone. For thirty years, he produced and distributed Project Gutenberg-tm eBooks with only a loose network of volunteer support.

Project Gutenberg-tm eBooks are often created from several printed editions, all of which are confirmed as Public Domain in the U.S. unless a copyright notice is included. Thus, we do not necessarily keep eBooks in compliance with any particular paper edition.

Most people start at our Web site which has the main PG search facility:

http://www.gutenberg.org

This Web site includes information about Project Gutenberg-tm, including how to make donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, how to help produce our new eBooks, and how to subscribe to our email newsletter to hear about new eBooks.